Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Cursos: MEC, LET, LEGM

Ficha de Trabalho da 14ª Aula Prática

1. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (t \geq 0, x \in [0,1]) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 1 \end{cases}$$

onde c é um parâmetro real.

3. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (t \geq 0, x, y \in [0,1]) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, & \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos(2\pi x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos(2\pi y) \end{cases}$$

4. Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \quad (x \in]0, \pi[) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \\ u(0,x) = \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

5. Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \quad (x \in [0, 2\pi]) \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0, \\ u(0,x) = x. \end{cases}$$