Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE 1 - 3 DE NOVEMBRO DE 2007 - DAS 9H ÀS 10:30H

Resolução Sumária

1. Seja $f(x+iy) = \cos(x)\,\mathrm{ch}(y) - i\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sh}(y)$.

[1 val.] (a) Mostre que f é analítica em $\mathbb{C}$.

Res: Uma condição necessária para que f seja analítica em $\mathbb{C}$ é que verifique as condições de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}$. De facto, tem-se:

$$\frac{\partial u}{dx} = -\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{ch}(y) = \frac{\partial v}{dy},$$

e

$$\frac{\partial u}{dy} = \cos(x)\,\mathrm{sh}(y) = -\frac{dv}{dx}.$$

Por outro lado, as funções $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, têm derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ o que conjuntamente com as condições de Cauchy-Riemann garante que $f = u + iv$ á analítica em $\mathbb{C}$.

[1 val.] (b) Calcule $\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\, dz$.

Res: Pela alínea anterior, e atendendo à fórmula integral de Cauchy para a 1≫ derivada, temos que:

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\, dz &= 2\pi i f'(0) = 2\pi i[\tfrac{\partial u}{dx} + i\tfrac{dv}{dx}]_{(x,y)=(0,0)} \\ &= 2\pi i[-\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{ch}(y) - i\cos(x)\,\mathrm{sh}(y)]_{(x,y)=(0,0)} \\ &= 2\pi i[0+0i] = 0.\end{aligned}$$

[1 val.] 2. Calcule a série de Taylor de $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$ em torno de $z_0 = 1$ e determine o seu raio de convergência.

Res: Como

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2},$$

e

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-(-(\frac{z-1}{2}))}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}},$$

desenvolvimento válido para $|z-1| < 2$, e, similarmente

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-(-(\frac{z-1}{3}))}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}},$$

desenvolvimento válido para $|z-1| < 3$, concluímos que o raio de convergência da série pedida é 2 e esta é:

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}](z-1)^n, \qquad \text{para } |z-1| < 2.$$

3. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$ definida em $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.
   (a) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido para $0 < |z| < 1$. [1

   Res: Tendo em conta que
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$
   para $|z| < 1$, logo se conclui que:
$$\frac{1}{z^2(1-z)} = z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2},$$
   desenvolvimento válido para $0 < |z| < 1$.

   (b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido para $1 < |z| < \infty$. [1

   Res: Tendo em conta que
$$\frac{1}{z^2(1-z)} = -z^{-2}\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}},$$
   para $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, o desenvolvimento pedido é
$$\frac{1}{z^2(1-z)} = -z^{-2}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+3)},$$
   para $|\frac{1}{z}| < 1 \equiv |z| > 1$.

   (c) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular [1
$$\oint_{|z|=2} f(z)\, dz.$$
   Res: O desenvolvimento obtido na alínea 3.b) é válido para $1 < |z| < \infty$ e o contorno $C = \{|z| = 2\}$ está contido nessa região (onde fé analítica). Os coeficientes desse desenvolvimento são dados por:
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz,$$
   para $n \in \mathbb{Z}$.
   Em particular, o coeficiente a_{-1} da série calculada em 3.b) dá-nos (a menos de $2\pi i$) o valor do integral pedido. Mas, como $a_{-1} = 0$, concluímos que $\oint_{|z|=2} f(z)\, dz = 0$.

4. Seja γ_R a curva fechada que limita o semicírculo
$$D_R = \{z = \rho e^{i\theta} : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\},$$
   de raio $R > 2$, percorrida no sentido positivo.

(a) Calcule o integral

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2}.$$

Res: A função integranda f tem duas singularidades ($z=-2i, z=2i$). Como $R>2$ a singularidade $z=2i$ está contida na região delimitada por γ_R e consequentemente, pelo Teorema dos residuos:

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = 2\pi i \text{ res } f(z=2i).$$

Uma vez que $1/f=(z^2+4)^2=(z+2i)^2(z-2i)^2$ tem zero duplo em $z=2i$ segue que f tem um pólo duplo em $z=2i$ e portanto

$$\text{Res } f(z=2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}[(z-2i)^2 f(z)0 = \frac{2}{4^3 i}.$$

Então,

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}.$$

[2 val.] (b) Calcule o integral real

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

Res: Atendendo ao facto de termos uma integranda par,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

Seja $C_R=\{z=Re^{i\theta}\ 0\le\theta\le\pi\}$, percorrida no sentido positivo. Podemos então escrever:

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} + \int_{I_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}.$$

para qualquer $R>2$. Como

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = 0,$$

uma vez que a integranda é uma função racional e o grau do polinómio do denominador (4) é maior ou igual que o grau do polinómio do numerador (0) mais 2, temos, passando ao limite na igualdade acima e tendo em conta a definição de integral impróprio, que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)^2}\,dx. = \frac{1}{32}.$$

[1 val.] 5. Seja Ω uma vizinhança de 0, e seja $f:\Omega\to\mathbb{C}$ uma função analítica com um zero de ordem 3 em $z=0$. Mostre que, para δ suficientemente pequeno, se tem

$$\oint_{|z|=\delta} \frac{dz}{f(z)} = \pi i\left(\frac{2(g'(0))^2 - g''(0)g(0)}{g^3(0)}\right)$$

onde $g(z)=f(z)/z^3$.

Res: Uma vez que f tem um zero de ordem 3 em $z = 0$, é claro que $\frac{1}{f}$ tem nesse ponto uma singularidade isolada, mais precisamente um pólo de ordem 3.

Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno por forma a que $z = 0$ seja a única singularidade de $\frac{1}{f}$ contida no disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \delta\}$. Então pelo Teorema dos resíduos temos que

$$\oint_{|z|=\delta} \frac{dz}{f(z)} = 2\pi i \ Res \ (\frac{1}{f})_{z=0}.$$

Atendendo ao facto de $z = 0$ ser um pólo de ordem 3 de $\frac{1}{f}$, concluímos que

$$\oint_{|z|=\delta} \frac{dz}{f(z)} = 2\pi i \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}[\frac{z^3}{f}] = \pi i \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}[\frac{1}{g}].$$

Derivando duas vezes $\frac{1}{g}$ e passando ao limite quando $z \to 0$ (e tendo em conta que esta derivada é contínua), obtemos imediatamente o resultado.