Lista 1: problemas opcionais

PO1. Seja $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um functor. Mostre que se $X, Y \in Ob_{\mathcal{C}}$ são tais que $X \cong Y$, então $FX \cong FY$.

PO2. Recorde que um functor covariante $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ define uma função $\mathcal{C}(X;Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$, $\forall X, Y \in Ob_{\mathcal{C}}$. Se esta função for injectiva, F diz-se *fiel*; se for sobrejectiva, F diz-se *pleno*. F diz-se *denso* se $\forall Y \in Ob_{\mathcal{D}}\ \exists X \in Ob_{\mathcal{C}}$ tal que $Y \cong FX$. Mostre que F é uma equivalência *sse* é denso, fiel e pleno.

Nota: Sejam $Vect_k^0$ a categoria dos k-espaços vectoriais de dimensão finita e Col_k a categoria dos k-espaços cujos objectos são k^n, $n \in \mathbb{N}$, com os morfismos de k-espaços vectoriais. O exercício mostra que $Vect_k^0$ é equivalente a Col_k.

PO3. Seja A um anel comutativo e $I \subset A$ um ideal. Mostre que

(a) I é primo $\Leftrightarrow A/I$ é um domínio integral;

(b) I é maximal $\Leftrightarrow A/I$ é um corpo.

PO4. Seja A um anel e $I \subset A$ um ideal. Mostre que existe um ideal maximal $\mathcal{M}$ tal que $I \subset \mathcal{M}$.