Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Álgebra II – Teste Tipo

Outubro de 2003

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. [**2.5**] Seja A um anel, M um A-módulo e $\pi\colon M \to M$ um homomorfismo de A-módulos tal que $\pi \circ \pi = \pi$. Mostre que $M = \ker(\pi) \oplus \mathrm{Im}(\pi)$.

2. [**2.5**] Seja A um anel. Um A-módulo M diz-se *simples* se $M \neq \{0\}$ e os únicos submódulos de M são $\{0\}$ e M.

   (a) [**2.5**] Mostre que todo o A-módulo simples é isomorfo a um quociente A/I onde I é um ideal esquerdo maximal.

   (b) [**2.5**] Mostre o *lema de Schur:* se M, N são A-módulos simples e $f\colon M \to N$ é A-linear então $f = 0$ ou f é um isomorfismo.

3. [**2.5**] Seja A um anel comutativo e sejam M, N e P A-módulos. Mostre que que existe um isomorfismo de A-módulos

$$\hom_A(M \otimes N, P) \cong \hom_A(M, \hom_A(N, P)).$$

4. [**2.5**] Seja D um domínio de ideais principais, $a, b \in D$ e $d = \mathrm{mdc}(a, b)$. Mostre que $D/\langle a\rangle \otimes_D D/\langle b\rangle \cong D/\langle d\rangle$.

5. [**2.5**] Seja G um grupo abeliano gerado por elementos x, y, z com as seguintes relações

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 8z &= 0 \\ 2x + 4z &= 0. \end{aligned}$$

   Determine os factores invariantes de G.

6. [**2.5**] Seja $p \in \mathbb{N}$ um primo e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que o número de grupos abelianos de ordem p^n é igual ao número de partições de n em naturais.

7. [**2.5**] Seja V um espaço vectorial de dimensão finita sobre um corpo k, $T\colon V \to V$ uma transformação linear, e M o $k[x]$-módulo determinado por T. Sejam $d_1(x), \dots, d_s(x) \in k[x]$ os factores invariantes de M, e $p(x) = d_1(x) \cdots d_s(x)$. Mostre $p(x) = \det(A - xI)$ e $p(A) = 0$.