Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º Teste de Álgebra

3 de Novembro de 2005

LMAC e MMA

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. (**2.5**) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Um *produto* de X, Y em $\mathcal{C}$ é um triplo $(Z, p, q) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \hom(Z, X) \times \hom(Z, Y)$ tal que: $\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\forall (f, g) \in \hom(W, X) \times \hom(W, Y)$ existe um único morfismo $h \in \hom(W, Z)$ que faz comutar o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \\ Y & W \arrow[l, "g"] \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dashed, "\exists h"'] \end{tikzcd}$$

Mostre que, se (Z, p, q), (Z', p', q') são produtos de X, Y, então $Z \cong Z'$.

2. (**5.0**) Indique se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas. Para as que forem falsas indique um contra-exemplo.

(a) O quociente de módulos cíclicos é cíclico;

(b) Se M, N e L são A-módulos, então os grupos abelianos $\hom_A(M \oplus N, L)$ e $\hom_A(M, L) \times \hom_A(N, L)$ são isomorfos;

(c) Se L é livre, toda a sucessão exacta de A-módulos $0 \to M \to N \to L \to 0$ se cinde.

(d) Todo o módulo sobre um *domínio de ideais principais* é uma soma directa de módulos cíclicos;

(e) Todo o módulo livre de torção é submódulo de um módulo livre;

3. (**4.0**) Usando diagonalização de matrizes com entradas em $\mathbb{C}[x]$, calcule a forma canónica de Jordan de $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Seja D um domínio integral com corpo de fracções $K = \mathrm{Frac}(D)$ e M um D-módulo. Seja N o quociente de $M \times (D - \{0\})$ pela seguinte relação de equivalência: $(v, d) \sim (v', d') \Leftrightarrow \exists_{d'' \in D - \{0\}} d''(dv' - d'v) = 0$. Designando a classe de equivalência de (v, d) por $[v, d]$, definem-se as seguintes operações $N \times N \to$ e $K \times N \to N$:

- $[v_1, d_1] + [v_2, d_2] = [d_2 v_1 + d_1 v_2, d_1 d_2]$;
- $\frac{a}{b}[v_1, d_1] = [a v_1, b d_1]$.

onde $v_i \in M, d_i, \in D - \{0\}, \frac{a}{b} \in K$. Estas operações estão bem definidas e definem uma estrutura de K-espaço vectorial em N.

(a) (**1.5**) Determine o núcleo do D-homomorfismo $\phi\colon M \to N$ definido por $\phi(v) = [v, 1]$.

(b) (**3.0**) Mostre que $N \cong M \otimes_D K$.

5. (**4.0**) Seja A um anel e M um A-módulo. Diz-se que M é *simples* se não tem submódulos próprios não triviais. Diz-se que M é *semi-simples* se $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ com M_i simples. Mostre que, se M é semi-simples, todo o submódulo $N \subset M$ tem um complemento.