Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Álgebra II – Resolução do 1º Teste

4 de Novembro de 2003

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

1. Seja π o homomorfismo $N \to P$ da sucessão. Seja $\mathcal{B}$ uma base para P. Para cada $e \in \mathcal{B}$ escolha-se $v_e \in N$ tal que $\pi(v_e) = e$ (o que é possível, pois π é sobrejectivo). Seja $s \colon P \to N$ o único homomorfismo tal que $s(e) = v_e$. Então s é uma *secção* para π, *i.e.* $\pi \circ s = \mathrm{id}_P$ (pois $\forall e \in \mathcal{B}$ $\pi(s(e)) = e$). Logo a sucessão cinde-se.

2. (a) Seja $j_s \in \hom(N_s, \bigoplus_{i\in I} N_i)$ a inclusão natural. Pela *propriedade universal* da soma directa, a aplicação $f \mapsto \phi(f) := (f \circ j_i)_{i\in I} \colon (\bigoplus_{i\in I} N_i)^* \to \prod_{i\in I} N_i^*$ é bijecção. Basta mostrar que ϕ é um homomorfismo de A-módulos:

$$\phi(f+g) = ((f+g)\circ j_i)_{i\in I} = (f\circ j_i + g\circ j_i)_{i\in I} = (f\circ j_i)_{i\in I} + (g\circ j_i)_{i\in I}$$
$$\phi(\lambda f) = ((\lambda f)\circ j_i)_{i\in I} = (\lambda(f\circ j_i))_{i\in I} = \lambda(f\circ j_i)_{i\in I}.$$

(b) Seja I um conjunto *finito* tal que $M \cong \bigoplus_{i\in I} A$. Pela alínea anterior, temos $M^* \cong \prod_{i\in I} A^* \cong \prod_{i\in I} A = \bigoplus_{i\in I} A$. Portanto, M^* é livre e $\dim M^* = \dim M = |I|$.

Usámos o seguinte resultado: $A^* \cong A$. O isomorfismo é dado por $f \mapsto f(1)$. O seu inverso é dado por $\lambda \mapsto (a \mapsto a\cdot\lambda)$.

3. Sejam $\varphi \colon M \times \mathbb{Z}_m \to M/mM$ e $\psi \colon M \to M \otimes \mathbb{Z}_m$ dadas por $\varphi(v,[k]) = kv + mM$ e $\psi(v) = v \otimes [1]$. Note-se que φ está bem definida pois $mv + mM = mM$. Como φ é bilinear existe $\widetilde{\varphi} \in \hom(M\otimes\mathbb{Z}_m, M/mM)$ tal que $\widetilde{\varphi}(v\otimes[k]) = \varphi(v,[k])$. Uma vez que ψ é linear e $mM \subset \ker\psi$, existe $\widetilde{\psi} \in \hom(M/mM, M\otimes\mathbb{Z}_m)$ tal que $\widetilde{\psi}(v+mM) = \psi(v)$. Temos

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{\psi}(v+mM)) = \widetilde{\varphi}(v\otimes[1]) = v + mM$$
$$\widetilde{\psi}(\widetilde{\varphi}(v\otimes[k])) = \widetilde{\psi}(kv+mM) = (kv)\otimes[1] = v\otimes[k].$$

Como os elementos da forma $v\otimes[k]$ geram $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_m$, temos $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi}^{-1}$ e portanto $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_m \cong M/mM$.

4. Seja $\phi \colon \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ a operação de multiplicação. Como ϕ é bilinear, existe $\bar{\phi} \in \hom(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ tal que $\bar{\phi}(r\otimes s) = \phi(r,s) = rs$. Seja $\psi \in \hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})$ dado por $\psi(r) = r\otimes 1$ (ψ é um homomorfismo pois $\otimes$ é bilinear). Para $r\in\mathbb{Q}$, $m\in\mathbb{Z}$ e $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$, temos $\psi(\bar{\phi}(r\otimes(\frac{m}{n})) = (\frac{rm}{n})\otimes 1 = \frac{r}{n}\otimes\frac{mn}{n} = \frac{rn}{n}\otimes\frac{m}{n} = r\otimes\frac{m}{n}$ e $\bar{\phi}(\psi(r)) = r\cdot 1 = r$. Logo $\psi = \bar{\phi}^{-1}$, pois os elementos da forma $r\otimes\frac{m}{n}$ geram $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. Portanto $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

5. Os grupos não são isomorfos pois têm decomposições em factores cíclicos primários diferentes: $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_8\oplus\mathbb{Z}_3\oplus(\mathbb{Z}_5)^2$ e $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_8\oplus\mathbb{Z}_3\oplus(\mathbb{Z}_{25})$.

6. Se dois grupos abelianos finitos G_1 e G_2 têm o mesmo número de elementos de ordem n, para todo $n\in\mathbb{N}$, dizemos que (G_1,G_2) satisfaz a propriedade $\mathcal{P}$.

Suponhamos que (G_1,G_2) satisfaz $\mathcal{P}$.

Seja p um primo. Definimos $G(p) := \{x\in G \mid \exists k\in\mathbb{N} : p^k x = 0\}$. Note-se que $G(p)$ é um p-grupo. Visto que $G(p) = \{x\in G \mid \exists k\in\mathbb{N} : \mathrm{ord}(x) \mid p^k\}$, concluímos que $(G_1(p), G_2(p))$ satisfaz $\mathcal{P}$. Como $G \cong \oplus_{p\ \text{primo}} G(p)$, podemos supor que G_1 e G_2 são p-grupos. Supomos também (sem perda de generalidade) que G_2 não tem mais factores cíclicos primários que G_1.

Dado um p-grupo A, definimos $N_k(A) = |\{x\in A \mid \mathrm{ord}(x) \mid p^k\}|$, $k\in\mathbb{N}$. Note-se que $N_k(A) - N_{k-1}(A) = |\{x\in A \mid \mathrm{ord}(x) = p^k\}|$, logo um par de p-grupos (A,A') satisfaz $\mathcal{P}$ sse $\forall k$ $N_k(A) = N_k(A')$.

Seja p^{m_i} a ordem máxima dos elementos de G_i. Por $\mathcal{P}$, temos $p^{m_1} = p^{m_2} =: p^m$. Se G_1 é cíclico, vem $G_1 \cong G_2 \cong \mathbb{Z}_{p^m}$. Caso contrário, existem p-grupos abelianos A_1 e A_2 tais que $G_i = A_i \oplus \mathbb{Z}_{p^m}$. Dado $(x, y) \in A_i \oplus \mathbb{Z}_{p^m}$, temos $p^k(x, y) = 0 \Leftrightarrow p^k x = 0 \wedge p^k y = 0$, pelo que

$$N_k(G_i) = N_k(A_i)N_k(\mathbb{Z}_{p^m}).$$

Logo $N_k(A_1) = N_k(A_2)$ e portanto (A_1, A_2) satisfaz $\mathcal{P}$. Por indução no número de factores cíclicos primários de G_1, concluímos que $G_1 \cong G_2$.

7. Seja $T\colon k^n \to k^n$ a transformação linear representada na base canónica pela matriz $A = (a_{i,j})$. A matriz A é a *forma racional* para T. Portanto o $k[x]$-módulo M associado a T é isomorfo a $k[x]/\langle f(x)\rangle$, onde $f(x) = x^p - \sum_{i=0}^{p-1} c_i x^i$ com $c_i = a_{i+1,p}$. Ou seja, $f(x) = x^p - 1$. Como $x^p - 1 = (x-1)^p$, temos $M \cong k[x]/\langle (x-1)^p \rangle$. Pelo Teorema de existência da forma canónica de Jordan, existe uma base para k^n em que T é representada pelo *bloco de Jordan* B. Em particular, A e B são semelhantes.