Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º Teste de Álgebra

20 de Dezembro de 2004
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. (a) **[1.0]** Seja G um grupo. Considere a acção de G em G por conjugação. Dado $x \in G$, determine o subgrupo de isotropia G_x.

(b) **[2.5]** Determine o número de elementos de S_4 que comutam com $\gamma = (12)(34)$.

2. Seja $p \in \mathbb{N}$ um primo. Considere o grupo

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p) := \{A \in M_2(\mathbb{F}_p) \mid \det A = 1\}.$$

(a) **[1.0]** Mostre que $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)| = p(p-1)(p+1)$.

(b) **[3.0]** Calcule o número de 3-subgrupos de Sylow de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.

3. (a) **[1.0]** Defina grupo nilpotente.

(b) **[3.0]** Mostre que se existe $H < C(G)$ tal que G/H é nilpotente, então G é nilpotente.

4. Determine o número de soluções distintas das seguintes equações em $\mathbb{F}_{81}$:

(a) **[1.5]** $x^{80} - 1 = 0$

(b) **[1.5]** $x^{81} - 1 = 0$

(c) **[1.5]** $x^{85} - 1 = 0$

Resolva uma das seguintes questões

OP1. Seja $E/\mathbb{Q}$ uma extensão de decomposição do polinómio $f(x) = x^5 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) **[1.5]** Determine a ordem do grupo $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

(b) **[2.5]** Determine geradores e relações para G.

OP2. **[4.0]** Sejam F_1/k e F_2/k subextensões de Galois de uma extensão de Galois E/k, tais que $E = F_1F_2$. Mostre que, se $\mathrm{Gal}(F_1/k)$ e $\mathrm{Gal}(F_2/k)$ são abelianos, então $\mathrm{Gal}(E/k)$ também o é.
Sugestão: Mostre que $\mathcal{D}(\mathrm{Gal}(E/k)) \subset \mathrm{Gal}(E/F_1) \cap \mathrm{Gal}(E/F_2) = \{1\}$.