**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# 2º Teste de Álgebra

15 de Dezembro de 2005

LMAC e MMA

**Duração: 1 hora e 30 minutos.**
**Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.**

**1.** **[2.0]** Considere a acção do grupo $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2) := \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}_2) \mid A \text{ é invertível}\}$ em $\mathbb{F}_2^3$, por transformações lineares. Mostre que se $H \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ é um subgrupo de ordem 7 então $H$ age transitivamente em $\mathbb{F}_2^3 - \{0\}$.

**2.** (a) **[1.5]** Defina o *grupo abelianizado* de um grupo $G$.

(b) **[1.5]** Calcule o abelianizado de $D_3$.

**3.** Seja $G$ um grupo com $5555 = 5 \times 11 \times 101$ elementos.

(a) **[1.5]** Determine o número de $101$-subgrupos de Sylow.

(b) **[1.5]** Determine o número de $11$-subgrupos de Sylow.

(c) **[1.5]** Determine o número de possíveis tipos de isomorfismo de $G$.

**4.** Considere o polinómio $f(x) = x^3 - x + 1$.

(a) **[2.0]** Determine o grupo de Galois de $f$ sobre $\mathbb{R}$.

(b) **[2.0]** Mostre que $f$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

(c) **[2.0]** Determine o grupo de Galois de $f$ sobre $\mathbb{Q}$.

(d) **[2.0]** Determine o grupo de Galois de $f$ sobre $\mathbb{F}_2$.