Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Álgebra II – 2º Teste

18 de Dezembro de 2003

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. [**2.5**] Seja G um grupo de ordem p^n, com $p \in \mathbb{N}$ primo. Usando a acção de conjugação de G em G mostre que $C(G) \neq \{e\}$.

2. [**3**] Seja G um grupo *simples* de ordem 168. Determine o número de elementos de ordem 7 de G.

Sugestão: Comece por determinar o número de subgrupos de ordem 7. Note que $168 = 8 \times 3 \times 7$.

3. [**2.5**] Recorde que D_4 é o grupo gerado por elementos x, y satisfazendo as relações seguintes: $x^4 = 1$, $y^2 = 1$, $yx = x^3y$. Mostre que:

(a) $\forall_{i\in\mathbb{Z}}\ yx^i = x^{3i}y$;

(b) $\mathcal{C}^1(D_4) = \langle x^2 \rangle$;

(c) D_4 é nilpotente com classe de nilpotência 2.

4. [**3**] Seja E/k uma extensão algébrica de corpos e seja D um domínio integral tal que $k \subset D \subset E$. Mostre que D é um corpo.

5. [**3**] Construa um corpo k com 4 elementos. Calcule as tabelas de adição e multiplicação de k.

6. [**3**] Determine a ordem do grupo de Galois do polinómio $x^6 - 7$ sobre $\mathbb{Q}$.

7. [**3**] Seja E/k uma extensão de Galois e sejam F_1/k, F_2/k extensões *de Galois* intermédias tais que $F_1 \cap F_2 = k$ e $E = F_1F_2$. Sejam $G = \mathrm{Gal}(E/k)$, $H_i = \mathrm{Gal}(E/F_i)$, $i = 1, 2$. Mostre que $G = H_1 \times H_2$.