Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Álgebra II – 2º Teste
Dezembro de 2003
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1. Consideremos a acção de G em G por conjugação. Sejam $\mathcal{O}_{g_i}, i = 1, \ldots, n$ as órbitas com mais que um elemento. Temos $p \mid |\mathcal{O}_{g_i}|$ pois $|\mathcal{O}_{g_i}| = (G : G_{g_i})$, G é um p-grupo e $G_{g_i} \neq G$. Notando que os elementos de $C(G)$ são precisamente aqueles cujas órbitas têm um só elemento, obtemos

$$G = C(G) \amalg \mathcal{O}_{g_1} \amalg \cdots \amalg \mathcal{O}_{g_n}.$$

Assim,

$$|G| = |C(G)| + |\mathcal{O}_{g_1}| + \cdots + |\mathcal{O}_{g_n}|,$$

o que implica $p \mid |C(G)|$ e portanto $C(G) \neq \{1\}$.

2. Seja n o número de subgrupos de ordem 7 de G. Ou seja, n é o número de subgrupos de Sylow para o primo 7. Pelos Teoremas de Sylow, sabemos que $n \mid 24$ e $n \equiv 1 (\mod 7)$. Logo $n = 1$ ou $n = 8$. Se $n = 1$, o único subgrupo de ordem 7 seria normal, o que é impossível pois G é simples. Concluímos que $n = 8$.

Um elemento $g \in G$ tem ordem 7 sse $|\langle g \rangle| = 7$. Sejam H_i, $i = 1, \ldots, 8$ os subgrupos de ordem 7. Como $H_i \cap H_j = \{e\}$, $i \neq j$, e cada H_i tem 6 elementos de ordem 7, concluímos que G tem $48 = 6 \times 8$ elementos de ordem 7.

3. (a) A fórmula é válida para $i = 0$. Supondo que é válida para i vem

$$yx^{i+1} = yx^i x = x^{3i} yx = x^{3(i+1)} y.$$

Portanto a fórmula é válida para $i \geq 0$. Para $i < 0$, vem

$$yx^i = yx^{-3i} = x^{-9i} y = (x^3)^{-3i} y = (x^{-1})^{-3i} y = x^{3i} y.$$

(b) Usando a fórmula de (a), obtemos

$$\begin{aligned}
(x^i y, x^j y) &= yx^{-i} yx^{-j} x^i yx^j y = yx^{-i} x^{3(i-j)} x^j y \\
&= x^{6(i-j)} = x^{2(i-j)}; \\
(x^i, x^j y) &= x^{-i} yx^{-j} x^i x^j y = x^{-i} x^{3i} = x^{2i}.
\end{aligned}$$

Notando que $(x^i, x^j) = 1$, concluímos que $C^1(G) = (G, G) = \langle x^2 \rangle$.

(c) Como $(x^2, y) = 1$ temos $x^2 \in C(G)$. Logo $C^2(G) = (G, \langle x^2 \rangle) = \{1\}$. Portanto, G é nilpotente com classe de nilpotência 2.

4. Seja $\alpha \in D - \{0\}$. Visto que E/k é algébrica, α é algébrico sobre k e portanto $k(\alpha) = k[\alpha] \subset D$ (pois D é um subanel). Em particular, $\alpha^{-1} \in D$. Concluímos que D é um subcorpo de E.

De forma mais explícita: Seja $f(x) = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} \in k[x]$ o polinómio mínimo de α. Por definição de f temos $a_n \neq 0$ e $f(\alpha) = 0$, logo

$$\alpha^{-1} = -a_n^{-1} \left(\alpha^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \alpha^{n-1-i} \right) \in D,$$

pois D é um subanel de E tal que $D \supset k \ni a_n^{-1}$.

5. O polinómio $f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ é irredutível pois não tem raízes (e tem grau 2). Logo $k = \mathbb{F}_2[x]/\langle f(x) \rangle$ é um corpo com 4 elementos. Seja $r = x + \langle f(x) \rangle$. Então $k = \{1, r\}$ é uma base para k como espaço vectorial sobre $\mathbb{F}_2$. Isto determina a tabela de adição. A tabela de multiplicação de k é determinada pela relação $r^2 = r + 1$:

$+$	0	1	r	$1+r$
0	0	1	r	$1+r$
1	1	0	$1+r$	r
r	r	$1+r$	0	1
$1+r$	$1+r$	r	1	0

$\times$	0	1	r	$1+r$
0	0	0	0	0
1	0	1	r	$1+r$
r	0	r	$1+r$	1
$1+r$	0	$1+r$	1	r

6. As raízes de $f(x) = x^6 - 7$ em $\mathbb{C}$ são $r\xi^i$, $0 \leq i \leq 5$, onde $r = \sqrt[6]{7}$ e $\xi = e^{\frac{\pi i}{3}}$, portanto o corpo de decomposição de f é $\mathbb{Q}(r, \xi)$. A ordem do grupo de Galois de f é

$$|G_f| = [\mathbb{Q}(r, \xi) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(r) : \mathbb{Q}][\mathbb{Q}(r, \xi) : \mathbb{Q}(r)].$$

Pelo critério de Eisenstein, f é irredutível; logo $[\mathbb{Q}(r) : \mathbb{Q}] = 6$. Como ξ é raíz de $g(x) = \frac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x + 1$ e $\xi \notin \mathbb{Q}(r)$ (pois $\xi \notin \mathbb{R}$), temos $[\mathbb{Q}(r, \xi) : \mathbb{Q}(r)] = 2$. Concluímos que $|G_f| = 12$.

7. Recorde-se que $G = H_1 \times H_2$ sse (i) $G = H_1 H_2$, (ii) $H_i \lhd G$, $i = 1, 2$, e (iii) $H_1 \cap H_2 = \{1\}$. Pelo teorema de Galois, vem

(i) $H_1 H_2 = G \Leftrightarrow E^{H_1 H_2} = k \Leftrightarrow E^{H_1} \cap E^{H_2} = k \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = k$;

(ii) $H_i \lhd G \Leftrightarrow F_i/k$ é de Galois, $i = 1, 2$;

(iii) $H_1 \cap H_2 = \{1\} \Leftrightarrow E^{H_1 \cap H_2} = E \Leftrightarrow E^{H_1} E^{H_2} = E \Leftrightarrow F_1 F_2 = E$.

Portanto, $G = H_1 \times H_2$.