Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício Resolvido 1

Descreva detalhadamente os cortes perpendiculares aos eixos coordenados sobre o sólido S definido da forma seguinte:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\,;\, y < x\,;\, y > 0\,;\,;\, z > 0\}$$

Resolução

Na figura 1 apresenta-se um esboço do sólido S em que o ponto P, que resulta da intersecção entre o plano $z = 0$, o plano $y = x$ e a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, tem coordenadas $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

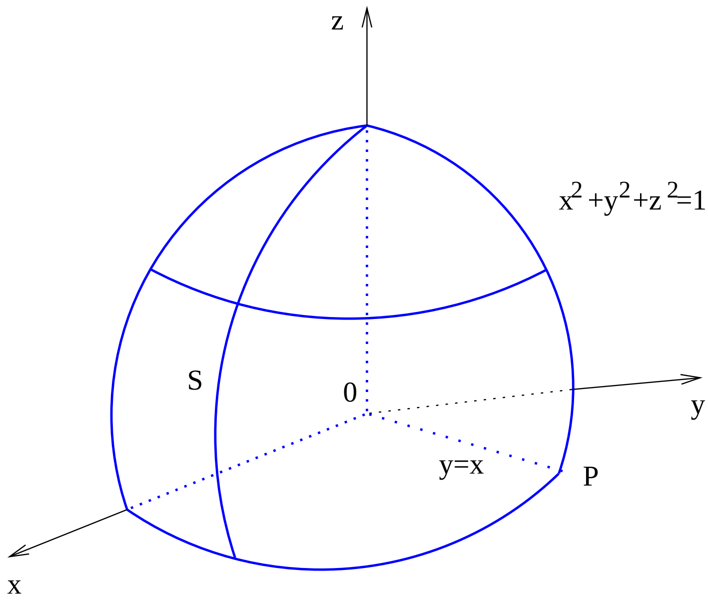

Figura 1: Esboço do sólido S.

1. Consideremos um corte sobre S e perpendicular ao eixo z, ou seja, consideremos a intersecção de S com um plano em que a coordenada z é constante. Dado que $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ e $z > 0$ então $0 < z < 1$ em S.

   Tendo fixado z no intervalo $]0, 1[$, obtemos o corte em S

   $$x^2 + y^2 < 1 - z^2\,;\, y < x\,;\, y > 0$$

   e que se representa na figura 2. Trata-se de um sector circular de raio $\sqrt{1 - z^2}$, entre o eixo x positivo e a recta $y = x$. A circunferência de raio $\sqrt{1 - z^2}$ e a recta $y = x$ intersectam-se sobre o ponto Q de coordenadas

   $\left(\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}, \sqrt{\frac{1-z^2}{2}}\right)$.

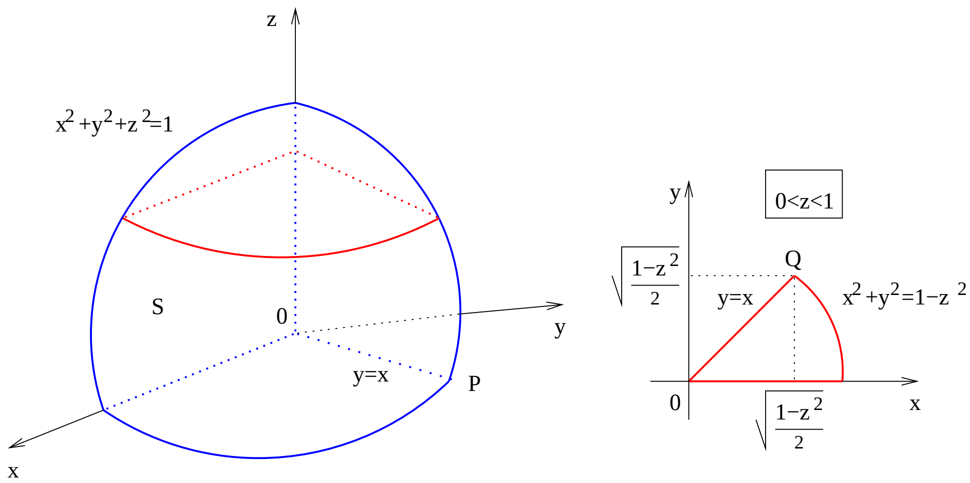

Figura 2: Corte segundo o plano em que z é constante.

2. Para o corte segundo um plano perpendicular ao eixo x, fixamos $0 < x < 1$. Dado que

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1\,;\, y < x$$

então $2y^2 < 1$, o que significa que

$$0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, sendo $y < x$, temos dois casos a considerar:

- $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ que produz o corte definido por

$$y^2 + z^2 < 1 - x^2\,;\, 0 < y < x$$

e representado na figura 3.

- $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$ que produz o corte definido por

$$y^2 + z^2 < 1 - x^2\,;\, y > 0\,;\, z > 0$$

e representado na figura 4.

3. Do caso anterior, temos $0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$ e o respectivo corte é dado por

$$x^2 + z^2 < 1 - y^2\,;\, x > y$$

que se representa na figura 5. O ponto T de intersecção entre a circunferência de raio $\sqrt{1-y^2}$ e a recta $x = y$ tem coordenadas $\left(y, \sqrt{1-2y^2}\right)$.

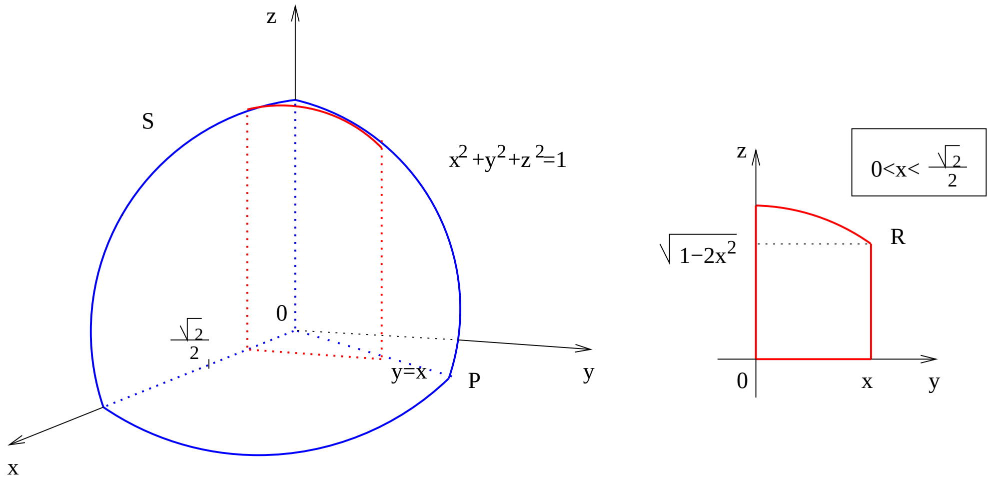

Figura 3: Corte segundo o plano em que $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ é constante.

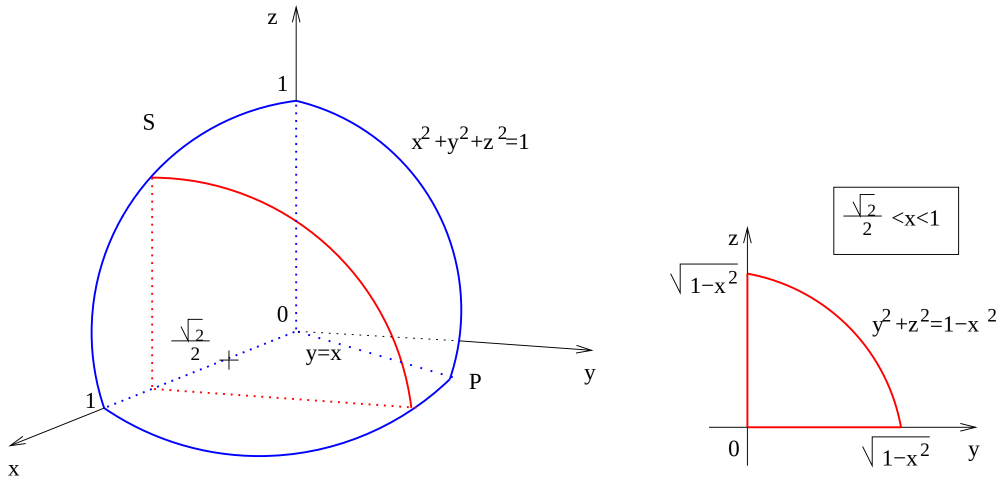

Figura 4: Corte segundo o plano em que $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$ é constante.

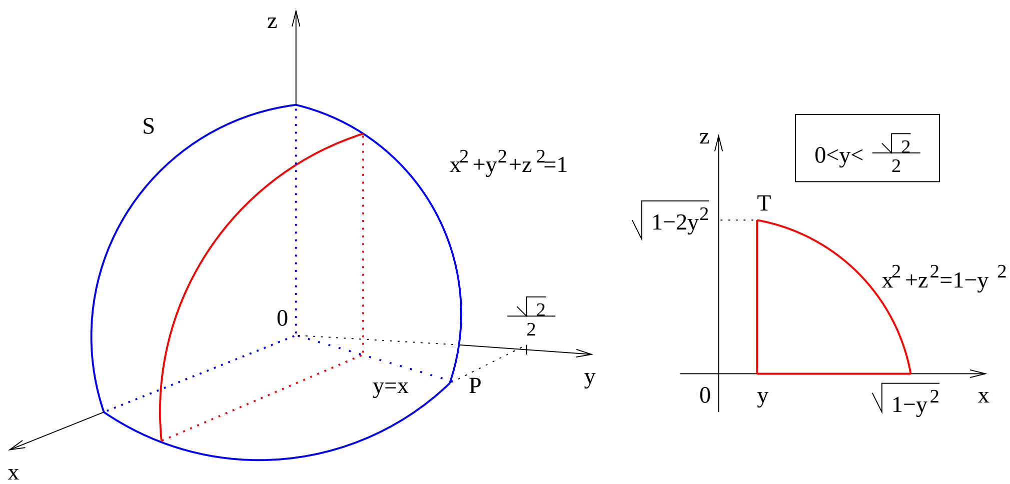

Figura 5: Corte segundo o plano em que $0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$ é constante.