Análise Matemática III
1º Semestre de 2000/2001

Exercício resolvido 11

Decomponha 1 numa soma de quatro números não negativos cujo produto seja máximo.

Solução: O problema pode ser visto como a determinação do máximo da função $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z, w) = xyzw$$

no conjunto

$$D = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 1, x, y, z, w \geq 0\right\}.$$

Este máximo tem que existir porque f é contínua e D é compacto (ou seja, limitado e fechado). Por outro lado, é fácil ver que não ocorre na intersecção de D com os planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ou $w = 0$, já que nestas intersecções $f = 0$, ao passo que f é positiva nos restantes pontos de D.

Os extremos de f ao longo da variedade definida pela equação

$$x + y + z + w - 1 = 0 \Leftrightarrow F(x, y, z, w) = 0$$

são dados pelo método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\left\{\begin{array}{c} \nabla f = \lambda \nabla F \\ F = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} yzw = \lambda \\ xzw = \lambda \\ xyw = \lambda \\ xyz = \lambda \\ x + y + z + w - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Estas equações juntamente com $x, y, z, w \neq 0$ implicam

$$x = y = z = w = \frac{1}{4}$$

que tem então que ser a única solução do problema.