Análise Matemática III
1º semestre de 2000/01

Exercício Resolvido 3

a) Calcule o integral da função em escada $s : [0,3] \times [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 2 \,,\ 0 < y < 1 \\ \pi & 0 < x < 2 \,,\ 1 < y < 3 \\ 5 & 0 < x < 2 \,,\ 3 < y < 4 \\ 1 & 2 < x < 3 \,,\ 0 < y < 4 \\ 79 & \text{nos restantes casos} \end{cases}$$

b) Mostre que a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ é uma função limite superior em $[0,1[\subset \mathbb{R}$. Calcule um majorante para o valor do seu integral.

Resolução

a) Considere-se a partição do intervalo $[0,3] \times [0,2]$ dada por $\{I_j\,;j=1,2,3,4\}$ em que

$$\begin{aligned} I_1 &= \,]0,2[\times]0,1[\\ I_2 &= \,]0,2[\times]1,3[\\ I_3 &= \,]0,2[\times]3,4[\\ I_4 &= \,]2,3[\times]0,4[\end{aligned}$$

Considere-se também o conjunto de valores $\{s_j\,;j=1,2,3,4\,\}$ dados por

$$\begin{aligned} s_1 &= 2 \\ s_2 &= \pi \\ s_3 &= 5 \\ s_4 &= 1 \end{aligned}$$

Assim, temos $s(x,y) = s_j$ para $(x,y) \in I_j$, ou seja o integral é dado por

$$\int_{[0,3]\times[0,2]} s = \sum_{j=1}^{4} s_j vol(I_j) = 2 \times 2 + \pi \times 4 + 5 \times 2 + 1 \times 4 = 18 + 4\pi.$$

Note-se que para o cálculo do integral não são relevantes os valores que s toma nas fronteiras dos intervalos I_j.

b) Vamos construir uma sucessão crescente de funções em escada que converge para f em $[0,1[$.

Considere-se a sucessão de funções em escada $s_k(x) : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$s_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-(n/2^k)}} & \text{se } \frac{n}{2^k} \leq x < \frac{n+1}{2^k} \text{ e } 0 \leq n < 2^k(1-1/k) - 1 \\ 0 & \text{se } x \geq 1 - 1/k \end{cases}$$

Por palavras, s_k obtém-se subdividindo o intervalo $[0, 1-1/k]$ em subintervalos de comprimento 2^{-k} e definindo s_k como sendo constante igual ao ínfimo de f no interior de cada um destes subintervalos e 0 para $x \geq 1 - 1/k$ (recorde-se que uma função em escada tem de ser 0 fora de algum intervalo limitado).

Então

(i) $s_k(x) \leq s_{k+1}(x)$ porque os subintervalos onde a função $s_{k+1}(x)$ é constante estão contidos naqueles onde $s_k(x)$ é constante e ambas as funções são definidas como sendo o ínfimo de f nestes intervalos.

(ii) $s_k(x) \to f(x)$ para todo o x porque a função f é contínua, o comprimento dos intervalos onde s_k é constante e positiva está a tender para 0 com k e qualquer x pertence a estes intervalos para k suficientemente grande.

De facto podemos verificar que $|f(x) - s_k(x)| \leq |f'(x)|2^{-k}$ e, para cada x, quando $k \to \infty$ temos $s_k(x) \to f(x)$.

(iii) Como $s_k(x) \leq f(x)$ no intervalo $[0, 1 - 1/k]$ temos

$$\int_{[0,1[} s_k = \int_0^{1-1/k} s_k(x)dx \leq \int_0^{1-1/k} f(x)dx$$

onde o último integral existe e pode ser calculado da maneira usual uma vez que f é contínua no intervalo compacto $[0, 1 - 1/k]$. Assim

$$\int_{[0,1[} s_k \leq \int_0^{1-1/k} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = (-2\sqrt{1-x})|_0^{1-1/k} = 2 - 2/\sqrt{k} \leq 2$$

e portanto a sucessão dos integrais das funções s_k é limitada.

Concluímos que f é uma função limite superior e que $\int_0^1 f(x)dx \leq 2$.