Análise Matemática III
1º Semestre de 2000/2001

Exercício resolvido 4
Escreva uma expressão para o volume do sólido

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \right\}$$

usando integrais iterados da forma

$$\text{(i)} \quad \int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz;$$

$$\text{(ii)} \quad \int \left(\int \left(\int dz \right) dx \right) dy.$$

Solução: O sólido S é obtido da esfera de raio 1 centrada na origem retirando-lhe os pontos que pertencem ao cilindro circular de raio $\frac{1}{2}$ e eixo $x = y = 0$. A intersecção das fronteiras da esfera e do cilindro é dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow z^2 = \frac{3}{4} \text{ e } x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

e consiste portanto em duas circunferências de raio $\frac{1}{2}$ contidas nos planos $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. É fácil ver que todos os pontos de S têm valores de z no intervalo $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; por exemplo, basta notar que os pontos de S satisfazem

$$z^2 \leq 1 - \left(x^2 + y^2\right) \leq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Assim, são estes os limites do integral em z quando o integral iterado é da forma (i).
A intersecção de S com um plano $z =$ constante é a coroa circular dada por

$$\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1 - z^2.$$

Consequentemente, em cada uma destas intersecções y varia entre $-\sqrt{1 - z^2}$ e $\sqrt{1 - z^2}$.
Para cada valor de (y, z), x tem que satisfazer

$$\frac{1}{4} - y^2 \leq x^2 \leq 1 - y^2 - z^2.$$

Há agora duas situações a distinguir: se $|y| \geq \frac{1}{2}$, x simplesmente varia entre $-\sqrt{1 - y^2 - z^2}$ e $\sqrt{1 - y^2 - z^2}$; se $|y| \leq \frac{1}{2}$, x satisfaz a condição adicional $|x| \geq \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$. (Isto acontece porque se $|y| \geq \frac{1}{2}$ a recta obtida fixando (y, z) e fazendo variar x não intersecta o cilindro $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$, e portanto a sua intersecção com S é um único segmento; se $|y| \leq \frac{1}{2}$ esta recta intersecta o cilindro e portanto intersecta S em dois segmentos).

Assim, o volume de S pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
vol\,(S) &= \int_{\mathbb{R}^3} \chi_S = \int_S 1 \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} 1dx \right) dy \right) dz \\
&+ \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} 1dx + \int_{\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} 1dx \right) dy \right) dz \\
&+ \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} 1dx \right) dy \right) dz,
\end{aligned}$$

correspondendo à ordem de integração pedida em (i).
Para escrever o mesmo integral na ordem de integração (ii), notamos que a projecção de S no plano xOy é a coroa circular

$$\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

o que implica que $|y| \leq 1$. Para cada valor de y tem-se

$$\frac{1}{4} - y^2 \leq x^2 \leq 1 - y^2$$

e portanto se $|y| \geq \frac{1}{2}$ tem-se $|x| \leq \sqrt{1-y^2}$, e se $|y| \leq \frac{1}{2}$ tem-se $\sqrt{\frac{1}{4} - y^2} \leq |x| \leq \sqrt{1-y^2}$. Como para cada valor de (x,y) os valores de z são apenas restritos pela equação da esfera, vemos que o volume de S pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1dz \right) dx \right) dy \\
&+ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1dz \right) dx + \int_{\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1dz \right) dx \right) dy \\
&+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1dz \right) dx \right) dy.
\end{aligned}$$