Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício Resolvido 5

Determine o volume do conjunto S dado por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\,;\ y > 0\,;\ x^2 + y^2 < z < \sqrt{x^2 + y^2}\,\}$$

usando uma mudança de coordenadas apropriada.

Resolução

Consideremos as coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) em que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Das inequações $x^2 + y^2 < z < \sqrt{x^2 + y^2}$, obtemos

$$\rho^2 < z < \rho$$

e das condições $x > 0\,;\ y > 0$, concluimos que

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

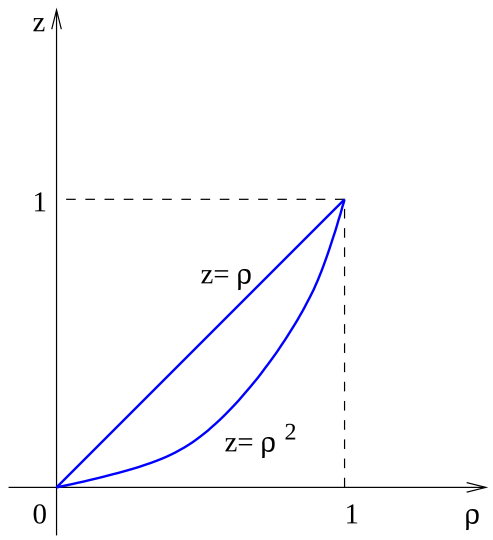

Figura 1: Corte em S segundo θ constante.

As superfícies dadas por $z = \rho^2$ e por $z = \rho$, intersectam-se para $\rho = 1$ ou $\rho = 0$. Portanto, temos

$$\begin{gathered} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2} \\ \rho^2 < z < \rho \end{gathered}$$

Na figura 1 está representado o corte em S segundo θ constante. Do teorema da mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned} vol_3(S) &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \left(\int_{\rho^2}^{\rho} \rho dz \right) d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \rho(\rho - \rho^2) d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$