Análise Matemática III
1º Semestre de 2000/2001

Exercício resolvido 8
Calcule
$$\oint_\gamma Pdx + Qdy$$
onde
$$(P,Q) = \left(-y^3 + \left(1+2x^2\right) ye^{x^2}\cos\left(y^2\right), x^3 + xe^{x^2}\left(\cos\left(y^2\right) - 2y^2\sin\left(y^2\right)\right)\right)$$
e γ é a circunferência de raio 1 percorrida uma vez no sentido directo.
Solução: Pelo teorema de Green,
$$\oint_\gamma Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$
onde S é o círculo de raio 1 centrado na origem. Como
$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= 3x^2 + \left(1+2x^2\right)e^{x^2}\left(\cos\left(y^2\right) - 2y^2\sin\left(y^2\right)\right);\\
\frac{\partial P}{\partial y} &= -3y^2 + \left(1+2x^2\right)e^{x^2}\left(\cos\left(y^2\right) - 2y^2\sin\left(y^2\right)\right),
\end{aligned}$$
concluimos que
$$\begin{aligned}
\oint_\gamma Pdx + Qdy &= \iint_S \left(3x^2+3y^2\right)dxdy\\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(3r^2\right)rd\theta dr\\
&= 2\pi\left[\frac{3r^4}{4}\right]_0^1\\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$
Note-se que o cálculo deste integral de linha pela definição seria bastante mais complicado.