Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício resolvido 9

Considere a função definida por

$$f(x, y) = (x^2 - y^2,\, xy).$$

a) Será que f é injectiva no seu domínio?

b) Caraterize os pontos em que f é localmente invertível.

c) Sabendo que $f(1, 1) = (0, 1)$, determine a derivada $Df^{-1}(0, 1)$.

Solução:

a) Consideremos os pontos de $\mathbb{R}^2$ da forma $(x, x)\,;\, x \neq 0$. Então, $f(x, x) = (0, x^2)$ e, portanto, $f(-x, -x) = f(x, x)$ donde se conclui que a função f não é injectiva em $\mathbb{R}^2$.

b) A função f é de classe C^1 no seu domínio. Assim, invocando o Teorema da Função Inversa, podemos determinar os pontos em que f é localmente invertível verificando apenas a condição: $\det Df(x, y) \neq 0$.

Mas,

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

e temos

$$\det Df(x, y) = 2(x^2 + y^2)$$

Portanto, a função f tem inversa local em cada ponto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

c) Note-se que

$$\det Df(1, 1) = \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 4$$

e, portanto, existem vizinhanças U de $(1, 1)$ e V de $f(1, 1) = (0, 1)$ tais que $f : U \to V$ é invertível, $f^{-1} : V \to U$ é de classe C^1 e

$$Df^{-1}(0, 1) = [Df(1, 1)]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$