Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício teste 1 (entregar na aula prática da semana de 25/9/2000)
Descreva detalhadamente os cortes perpendiculares aos eixos coordenados sobre o sólido S definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1\,;\, y > x\,;\, x > 0\,;\, z > 0\}$$

Solução:

Na figura 1 encontra-se um esboço do conjunto S em que se representam os planos dados pelas equações

$$x + y + z = 1\,;\, y = x\,;\, x = 0\,;\, z = 0.$$

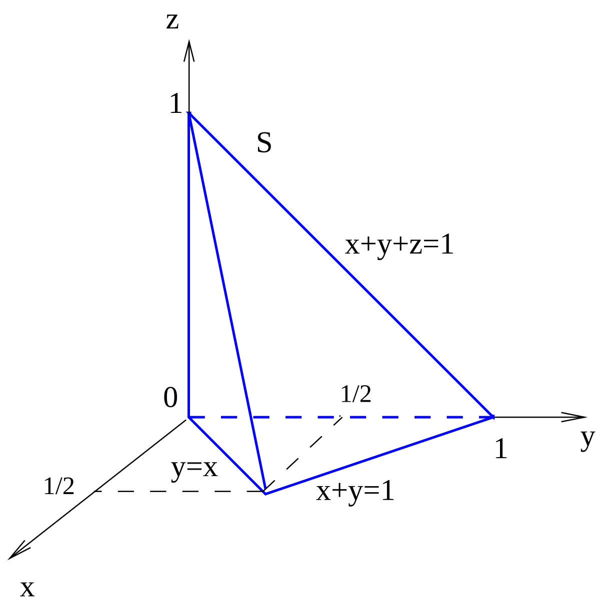

Figura 1: Esboço do sólido S.

Note-se que no plano $z = 0$ as rectas $y = x$ e $x + y = 1$ intersectam-se no ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Portanto, para descrever os cortes em S, perpendiculares aos eixos coordenados, devemos fixar a variável x no intervalo $]0, \frac{1}{2}[$ e cada uma das variáveis y e z no intervalo $]0, 1[$.

1. Fixando $0 < z < 1$ obtemos o corte em S descrito pelas inequações

   $$x + y < 1 - z\,;\, y > x\,;\, x > 0$$

   e que se representa na figura 2.

2. Para obter o corte em S perpendicular ao eixo x fixamos a variável x no intervalo $]0, \frac{1}{2}[$. A respectiva descrição é dada pelas inequações

   $$y + z < 1 - x\,;\, y > x\,;\, z > 0$$

   e a sua representação gráfica encontra-se na figura 3.

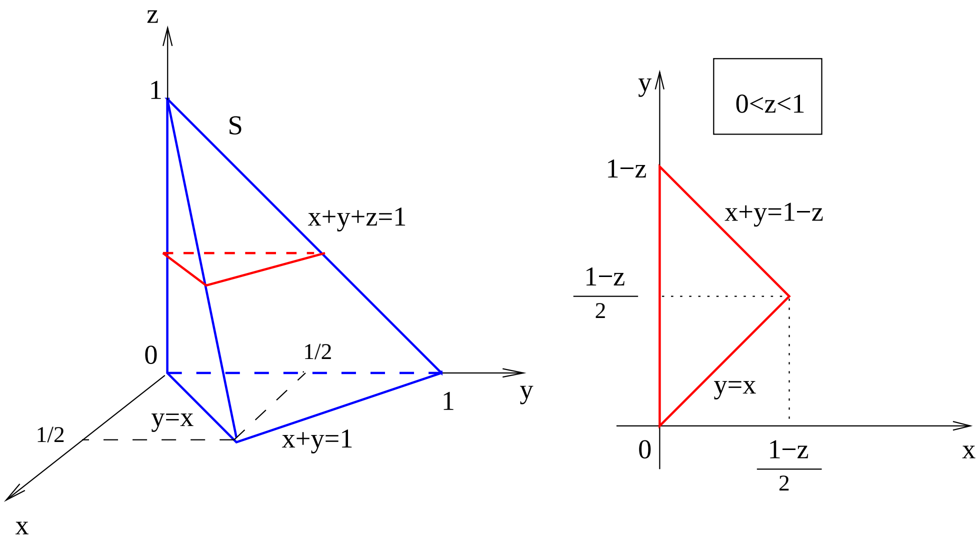

Figura 2: Corte em S perpendicular a z.

3. Dado que

$$x > 0\,;\, y > 0\,;\, z > 0\,;\, y > x$$

da inequação $x + y + z < 1$, obtemos

$$2x < 1 \iff x < \frac{1}{2}$$

Portanto, sendo $y > x$, para fixar y no intervalo $]0, 1[$, devemos considerar dois casos:

- Para $0 < y < \frac{1}{2}$, temos o corte descrito por

$$x < y\,;\, x + z < 1 - y\,;\, z > 0$$

  e que se representa na figura 4.

- Para $\frac{1}{2} < y < 1$ a condição $y > x$ é supérflua e o corte perpendicular ao eixo y é descrito por

$$x + z < 1 - y\,;\, z > 0\,;\, x > 0$$

  e representado na figura 5.

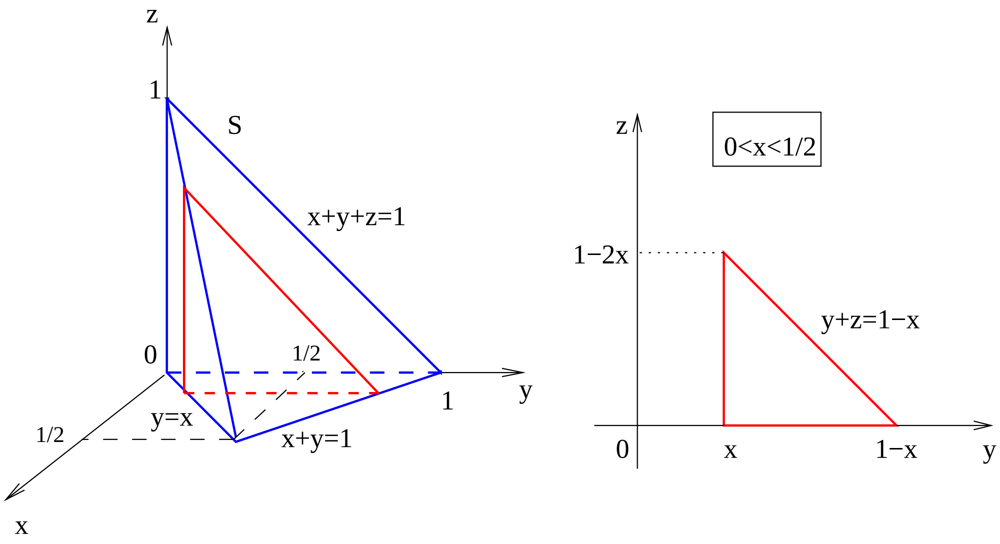

Figura 3: Corte em S perpendicular a x.

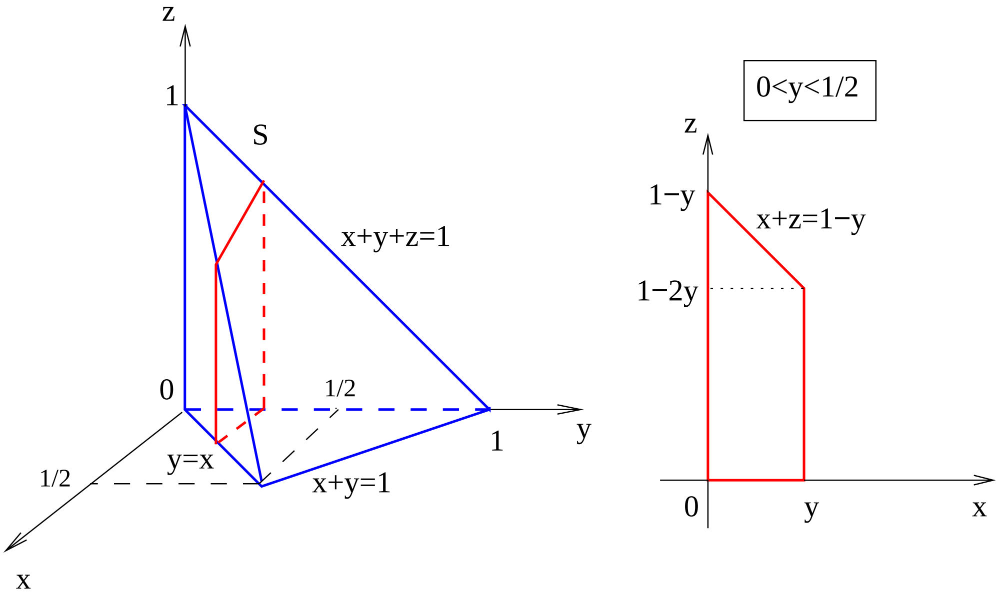

Figura 4: Corte em S perpendicular a y para $0 < y < \frac{1}{2}$.

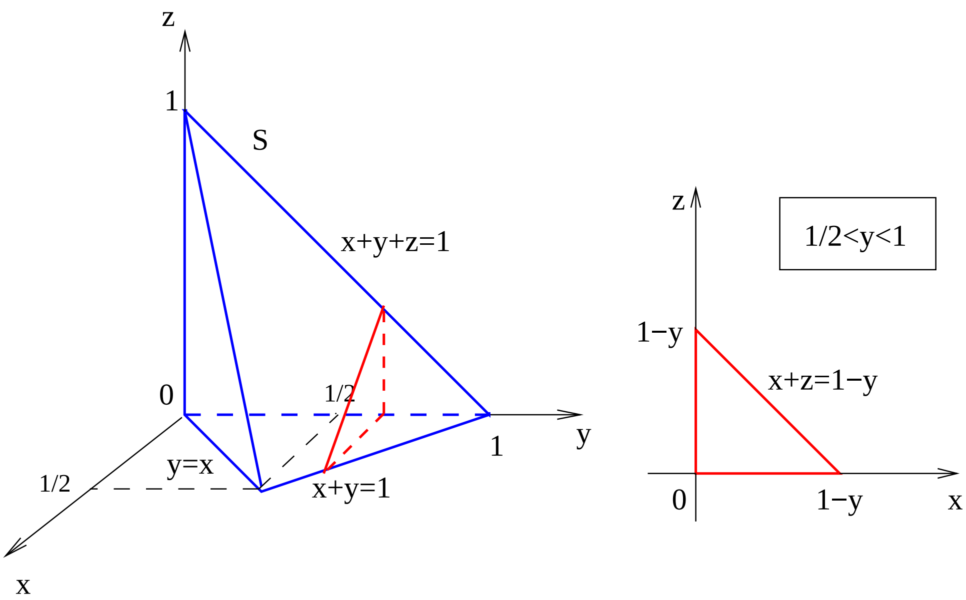

Figura 5: Corte em S perpendicular a y para $\frac{1}{2} < y < 1$.