Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 6

Um filamento eléctrico C, com densidade de carga eléctrica $\sigma(x, y, z) = \sqrt{5 - 8(x+1)(y+1)}$, tem a configuração da intersecção das superfícies $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$ e $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y + z = -1\}$. Calcule a carga eléctrica de C.

Resolução: A carga eléctrica do filamento é dada pelo integral de linha

$$q = \int_C \sigma.$$

Para calcular este integral de linha precisamos de determinar uma parametrização para a curva C. Comecemos por determinar a equação da projecção, C', de C no plano xOy:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = -1 - 2y - 2x \end{cases} \Rightarrow \quad -1 - 2y - 2x = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1.$$

Portanto a projecção C' é uma circunferência de raio 1 centrada no ponto $(-1, -1, 0)$. Uma parametrização para C pode ser definida por

$$g(t) = (\cos(t) - 1, \operatorname{sen}(t) - 1, 3 - 2\cos(t) - 2\operatorname{sen}(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Onde se usou o facto de que, quando t percorre o intervalo $[0, 2\pi]$, $(\cos(t) - 1, \operatorname{sen}(t) - 1, 0)$ percorre a projecção C' e que o único ponto de C por cima de $(\cos(t) - 1, \operatorname{sen}(t) - 1, 0)$ tem coordenada z dada por

$$z = -1 - 2(\operatorname{sen}(t) - 1) - 2(\cos(t) - 1) = 3 - 2\cos(t) - 2\operatorname{sen}(t).$$

Temos

$$g'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 2\operatorname{sen}(t) - 2\cos(t))$$

$$||g'(t)|| = \sqrt{\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) + (2\operatorname{sen}(t) - 2\cos(t))^2} = \sqrt{5 - 8\operatorname{sen}(t)\cos(t)}$$

$$\sigma(g(t)) = \sqrt{5 - 8(x(g(t)) + 1)(y(g(t)) + 1)} = \sqrt{5 - 8\cos(t)\operatorname{sen}(t)},$$

logo

$$q = \int_0^{2\pi} \sigma(g(t))||g'(t)||dt = \int_0^{2\pi} (5 - 8\cos(t)\operatorname{sen}(t))dt =$$

$$[5t + 2\cos(2t)]_0^{2\pi} = 10\pi.$$