Análise Matemática III
$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2000/2001

Exercício teste 8 (a entregar na aula prática da semana de 13/11 a 17/11)
Calcule
$$\oint_\gamma Pdx + Qdy$$
onde
$$(P,Q) = \left(-y + \frac{1 - x^2 + y^2 - 2xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}, \cos(x) + \frac{1 + x^2 - y^2 - 2xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\right)$$
e γ é a fronteira do quadrado
$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\right\}$$
percorrida uma vez no sentido directo.
Solução: Pelo teorema de Green,
$$\oint_\gamma Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$
Como
$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= -\operatorname{sen}(x) + \frac{(2x-2y)\left(1+x^2+y^2\right)^2 - 4x\left(1+x^2+y^2\right)\left(1+x^2-y^2-2xy\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)^4}; \\
\frac{\partial P}{\partial y} &= -1 + \frac{(2y-2x)\left(1+x^2+y^2\right)^2 - 4y\left(1+x^2+y^2\right)\left(1-x^2+y^2-2xy\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)^4},
\end{aligned}$$
concluimos que
$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= -\operatorname{sen}(x) + 1 + \frac{4(x-y)\left(1+x^2+y^2\right) - 4\left(x + x^3 + xy^2 - y - yx^2 - y^3\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)^3} \\
&= -\operatorname{sen}(x) + 1
\end{aligned}$$
e que portanto
$$\oint_\gamma Pdx + Qdy = \iint_S \left(-\operatorname{sen}(x) + 1\right) dxdy = 4$$
(já que $\operatorname{sen}(x)$ é ímpar e portanto o seu integral em $[-1,1]$ é zero).
Note-se que o cálculo deste integral de linha pela definição seria bastante mais complicado.