Análise Matemática III
1º semestre de 2001/02

Episódio 12 (ou 3')[1]
Como terá reparado nem só os Gaudêncios têm tido uma vida difícil. As formigas não têm, com o decorrer da História, vivido propriamente num mar de rosas. Imagine que as descendentes das que sobreviveram ao circo de Marcelino G e à rampa infinita de Feriado G tiveram de se sujeitar às idiossincrasias do conhecido Ás do râguebi, Mário Gaudêncio. E que idiossincrasias! Não se sabe bem porquê, mas MG convenceu-se que uma bola de râguebi, cuja massa se concentra essencialmente na superfície, melhora se preenchida com esponja e se, antes de cada jogo, nessa esponja for colocada uma formiga[2], a qual se pode mover livremente pela esponja ou fixar-se em qualquer dos seus pontos. Felizmente que as formigas, animais de inteligência única, descobriram que há, no interior da bola, um ponto que, durante o jogo, se move de forma particularmente simples, provocando todos os restantes pontos uma grande dor de cabeça (e de antenas). Pelas leis da física de Isacus Netonus Formigus, estabelecidas já no ano de 3 012 224 AC (!), esse ponto é o centro de massa!

Sabendo que podemos desprezar a massa da esponja e da formiga, que a superfície da bola é dada por

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \right\}$$

e que a densidade (superficial) de massa em S é (outra extravagância de MG)

$$\sigma(x, y, z) = \frac{(z-1)^2 + 1}{\sqrt{9 - \frac{8}{9}z^2}} \ ,$$

determine a coordenada $\overline{z}$ da formiga, perdão, **do centro de massa da bola** S **(pela simetria do problema é claro que** $\overline{x} = \overline{y} = 0$).

[1]na numeração formiga, uma vez que adoptamos nesta narrativa o ponto de vista da ADFM, Associação de Defesa das Formigas Maltratadas.

[2]suspeita-se que este estranho hábito tenha a ver com misteriosas crenças supersticiosas de MG.