

Análise Matemática III

1º semestre de 2001/02

Episódio 12 (ou 3')¹

Como terá reparado nem só os Gaudêncios têm tido uma vida difícil. As formigas não têm, com o decorrer da História, vivido propriamente num mar de rosas. Imagine que as descendentes das que sobreviveram ao circo de Marcelino G e à rampa infinita de Feriado G tiveram de se sujeitar às idiosincrasias do conhecido Ás do rãguebi, Mário Gaudêncio. E que idiosincrasias! Não se sabe bem porquê, mas MG convenceu-se que uma bola de rãguebi, cuja massa se concentra essencialmente na superfície, melhora se preenchida com esponja e se, antes de cada jogo, nessa esponja for colocada uma formiga², a qual se pode mover livremente pela esponja ou fixar-se em qualquer dos seus pontos. Felizmente que as formigas, animais de inteligência única, descobriram que há, no interior da bola, um ponto que se move de forma particularmente simples durante o jogo, provocando todos os restantes pontos uma grande dor de cabeça (e de antenas). Pelas leis da física de Isacus Netonus Formigus, estabelecidas já no ano de 3 012 224 AC (!), esse ponto é o centro de massa!

Sabendo que podemos desprezar a massa da esponja e da formiga, que a superfície da bola é dada por

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \right\}$$

e que a densidade (superficial) de massa em S é (outra extravagância de MG)

$$\sigma(x, y, z) = \frac{(z-1)^2 + 1}{\sqrt{9 - \frac{8}{9}z^2}},$$

determine a coordenada \bar{z} da formiga, perdão, do centro de massa da bola S (pela simetria do problema é claro que $\bar{x} = \bar{y} = 0$).

Solução:

Temos primeiro de determinar a massa da bola que é dada pelo integral de superfície pela variedade-2 S da densidade de massa σ

$$M = \int_S \sigma.$$

A simetria do problema torna natural a utilização da seguinte parametrização da vizinhança de coordenadas $S \cap U$ de S , $S \cap U = S \setminus L$ (onde L é o subconjunto de S constituído pelos pontos com $y = 0$ e $x \geq 0$. L tem massa zero e portanto não contribui para a posição do centro de massa de S):

$$g : \begin{cases} x = \cos(\theta)\text{sen}(\varphi) \\ y = \text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi) ; \\ z = 3\cos(\varphi) \end{cases} \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \varphi < \pi$$

¹na numeração formiga, uma vez que adoptamos nesta narrativa o ponto de vista da ADFM, Associação de Defesa das Formigas Maltratadas.

²suspeita-se que este estranho hábito tenha a ver com misteriosas crenças supersticiosas de MG.

para a qual temos

$$Dg(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi) & \operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 & -3\operatorname{sen}(\varphi) \end{pmatrix}$$

e portanto

$$Dg^t Dg = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2(\varphi) & 0 \\ 0 & \cos^2(\varphi) + 9\operatorname{sen}^2(\varphi) \end{pmatrix}$$

e

$$\sqrt{\det(Dg^t Dg)} = \operatorname{sen}(\varphi)\sqrt{9 - 8\cos^2(\varphi)}.$$

Então

$$\begin{aligned} M = \int_S \sigma &= \int_{S \setminus L} \sigma = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(x(\theta, \varphi), y(\theta, \varphi), z(\theta, \varphi)) \sqrt{\det(Dg^t Dg)} \, d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(3\cos(\varphi) - 1)^2 + 1}{\sqrt{9 - 8\cos^2(\varphi)}} \operatorname{sen}(\varphi) \sqrt{9 - 8\cos^2(\varphi)} \, d\theta d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^\pi ((3\cos(\varphi) - 1)^2 + 1) \operatorname{sen}(\varphi) \, d\varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Fazendo em (1) a mudança de coordenadas $u = -\cos(\varphi)$ temos

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_{-1}^1 (9u^2 + 6u + 2) \, du = \\ &= 2\pi (3u^3 + 3u^2 + 2u) \Big|_{-1}^1 = 20\pi. \end{aligned}$$

Para a coordenada \bar{z} do centro de massa da bola tem-se assim

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \int_S z\sigma = \int_{S \setminus L} z\sigma = \\ &= \frac{1}{20\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 3\cos(\varphi) ((3\cos(\varphi) - 1)^2 + 1) \operatorname{sen}(\varphi) \, d\theta d\varphi = \\ &= -\frac{3}{10} \int_{-1}^1 (9u^3 + 6u^2 + 2u) \, du = \\ &= -\frac{3}{10} 4 = -\frac{6}{5}. \end{aligned}$$