Análise Matemática III
1º semestre de 2001/02

Exercício Teste 13

No ano 2150 o trânsito em Lisboa tornou-se caótico ! Na verdade, é preciso recuar ao longínquo ano de 2113 — ano em que o automóvel foi finalmente substituído pelo disco voador — para encontrar congestionamentos desta magnitude.

Para obviar a esta grave situação, o presidente da edilidade alfacinha, Celestino Gaudêncio, decidiu levar a cabo uma alteração dos sentidos do trânsito em algumas das principais artérias da cidade de Ulisses. No ponto de confluência de todas as vias afectadas está o conhecido "Hiperbolóide de Pombal", onde os técnicos camarários esperavam que viessem a sentir-se melhorias imediatas na circulação, enquanto os adversários de Celestino previam que viesse a dar-se um estrangulamento do tráfego que provocasse o estrangulamento político do conhecido autarca.

À hora de ponta do dia de entrada em funcionamento do novo esquema de trânsito, Celestino decidiu enviar para o "Hiperbolóide de Pombal" o mais qualificado agente da divisão de trânsito da polícia, Firmino Gaudêncio[1], a fim de aferir o sucesso do mesmo. O Agente Gaudêncio — como Firmino é conhecido nos meios policiais — destacou-se na Academia de Polícia por ter tido 20 valores no exame de AMIII, que desde há muitos anos é obrigatório para aceder à divisão de trânsito. Trinta segundos depois de chegar ao local, Firmino já tinha a resposta para as interrogações do seu primo.

Sabendo que o "Hiperbolóide de Pombal" — esse ex-líbris da cidade de Lisboa — tem a forma do conjunto

$$\mathrm{HP} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1+z^2,\ -1 < z < 1\right\},$$

que as densidades de fluxo do trânsito, antes e depois da entrada em vigor das medidas de Celestino, são dadas por

$$f_{ac}(x,y,z) = 10^5(x,-y,-z)$$

e

$$f_{dc}(x,y,z) = f_{ac}(x,y,z) + (1,-1,2x-2y),$$

respectivamente, determine os valores obtidos pelo Agente Gaudêncio para o número discos voadores que saem do "Hiperbolóide de Pombal" por unidade de tempo (*i.e.* calcule o fluxo do campo):

(a) antes das medidas de Celestino, usando o teorema da divergência;

(b) depois das medidas de Celestino, usando o resultado de (a) e o teorema de Stokes.

Solução:

(a) Consideremos as superfícies planas

$$P_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 2,\ z = 1\right\}$$
$$P_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 2,\ z = -1\right\},$$

[1] seu primo direito

e seja V o sólido limitado por HP, P_1 e P_0:

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1+z^2,\ -1<z<1\right\}.$$

Aplicando o teorema da divergência, vem

$$\iiint_V \nabla \cdot f_{ac} = \iint_{\mathrm{HP}} f_{ac}\cdot n + \iint_{P_1} f_{ac}\cdot n + \iint_{P_0} f_{ac}\cdot n,$$

onde n é a normal unitária exterior a V. Atendendo a que $n=(0,0,1)$ em P_1, e $n=(0,0,-1)$ em P_0, obtemos

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathrm{HP}} f_{ac}\cdot n &= \iiint_V \nabla\cdot f_{ac} - \iint_{P_1} f_{ac}\cdot n - \iint_{P_0} f_{ac}\cdot n \\
&= \iiint_V -10^5 - \iint_{P_1}(-10^5) - \iint_{P_0}(-10^5) \\
&= -10^5 \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1+z^2}}\left(\int_0^{2\pi}\rho d\theta\right)d\rho\right)dz + 10^5 vol_2(P_1) + 10^5 vol_2(P_0) \\
&= -10^5\pi\int_{-1}^{1}(1+z^2)dz + 4\pi 10^5 \\
&= \frac{4}{3}\pi 10^5.
\end{aligned}$$

(b) Seja $F(x,y,z)=(1,-1,2x-2y)$. Da igualdade $f_{dc}(x,y,z)=f_{ac}(x,y,z)+F(x,y,z)$ e do resultado da alínea (a), vem

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathrm{HP}} f_{dc}\cdot n &= \iint_{\mathrm{HP}} f_{ac}\cdot n + \iint_{\mathrm{HP}} F\cdot n \\
&= \frac{4}{3}\pi 10^5 + \iint_{\mathrm{HP}} F\cdot n.
\end{aligned}$$

Pretendemos agora aplicar o teorema de Stokes para calcular o fluxo do campo vectorial F. Note-se que $\nabla\cdot F=0$. Como F está definido em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, concluímos que F é um campo rotacional. Se A é um potencial vector para F, i.e., se $F=\nabla\times A$, então devemos ter

$$\begin{cases}
\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 1 \\
\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = -1 \\
\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 2x-2y
\end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente permite-nos sempre supor que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_1=0$. Então obtemos

$$\begin{cases}
\frac{\partial A_3}{\partial x} = 1 \\
\frac{\partial A_2}{\partial x} = 2x-2y \\
\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 1
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
A_3 = x + f(y,z) \\
A_1 = x^2-2xy+g(y,z) \\
\frac{\partial f}{\partial y} = 1
\end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher $g = 0$ e $f = y$. Um potencial vector para F é então

$$A = (0, x^2 - 2xy, x + y).$$

Aplicando o teorema de Stokes, vem

$$\iint_{\mathrm{HP}} F \cdot n = \iint_{\mathrm{HP}} \nabla \times A \cdot n = \int_{\partial\,\mathrm{HP}} A \cdot d\alpha,$$

onde α é um caminho que percorre $\partial\,\mathrm{HP}$ no sentido compatível com a normal exterior n. Ora,

$$\begin{aligned}\partial\,\mathrm{HP} &= C_1 \cup C_0 \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2,\ z = 1\right\} \cup \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2,\ z = -1\right\},\end{aligned}$$

pelo que α percorre C_1 no sentido horário e C_0 no sentido anti-horário, quando visto do ponto $(0,0,2)$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\int_{\partial\,\mathrm{HP}} A \cdot d\alpha =& \int_0^{2\pi} A(\sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\operatorname{sen} t, 1) \cdot (-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, -\sqrt{2}\cos t, 0)dt \\ &+ \int_0^{2\pi} A(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, -1) \cdot (-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t, 0)dt \\ =& \, 0.\end{aligned}$$

Concluímos que $\iint_{\mathrm{HP}} f_{dc} \cdot n = \frac{4}{3}\pi 10^5$, pelo que as medidas de Celestino não alteraram a situação.