Análise Matemática III
1º semestre de 2001/02

Exercício Teste Resolvido 14

É véspera de Natal. A vivenda Gaudêncio[1] está muito animada com a reunião de toda a família. Na sala, a Sra. Gaudêncio fuma um havano enquanto conversa com todos. Jack Gaudêncio come donuts atrás de donuts e vai abrindo a porta aos convidados. Consuela e Marcelino consolam Feriado Gaudêncio que não consegue parar de gemer de emoção. André Gil discute alta finança com Celestino, que tem o pé engessado por lá ter deixado cair em cima os papéis com o seu último discurso na Câmara Municipal. E, na acolhedora cozinha dos Gaudêncios, o Sr. Gaudêncio está a cozinhar bolos no forno.

De repente, saindo aos pulos de debaixo da mesa, o "tiquinho" salta e crava as unhas no capacete negro de Darth Gaudêncio. Este, com o seu conhecido mau feitio, liga de imediato o sabre de luz e golpeia a atmosfera:

- "Ahhh, maldito esquilo, se eu te apanho faço-te em fatias!"

Acidentalmente, o sabre de luz corta a mão mecânica de Luke Gaudêncio:

- "Ai! Ai! Bolas, outra vez não! Oh pai, és mesmo desastrado com essa porcaria!"

A menina Lucialima corre para o centro da cena:

- "Oh darthinho! Pára com isso que ainda magoas mais alguém! Não vez que o teu sabre de luz liberta, no semi-cilindro infinito $z > 0$ e $x^2 + y^2 < 1$, uma densidade de energia por unidade de volume e de tempo dada por $f(x, y, z) = z\mathrm{sen}^2(z)\exp(-z^2 + x^2 + y^2)$!"

- "Que disparate! Isso dava uma energia infinita por unidade de tempo!" - responde Darth Gaudêncio.

- "Claro que não dava. Não percebes nada de AMIII!" - retorquiu a menina Lucialima.

a) Mostre que a menina Lucialima, como sempre, tem razão e que $f(x, y, z)$ é integrável no semi-cilindro infinito.

No outro lado da sala, o Comodoro Gaudêncio conversava com Carlos Quente:

- "Pois é. Ia eu na minha nave a entrar no Hiperbolóide de Pombal e ali o Firmino manda-me encostar na berma:"

- "Oh Comodoro! Tem calma pá! Vais apanhar algum comboio ? Olha que o limite de velocidade na direcção x é de $2e + 5/2$!"

- "Eu respondi-lhe: Olhó Firmino! Tás bom ? Mas ouve lá, eu não ia depressa demais! De acordo com os instrumentos da minha nave a minha posição x era dada por $x(t) = \int_0^{(1+t)^2} (s^2 + st + e^s)ds$!"

- "Como somos os dois uns cromos em AMIII, em poucos segundos fizemos as contas. E diz-me o Firmino:"

- "Safas-te mesmo à justa! Não devias andar tão em cima do risco! Olha lá, não me dás boleia para a festa de Natal da família ?"

b) Para justificar a afirmação de Firmino, calcule a velocidade na direcção x da nave do Comodoro no instante $t = 0$.

[1] ©"Família Gaudêncio" é uma marca registada da AMIII.

- "E foi assim que cá chegámos", continuou o Comodoro para Carlos Quente.

Os olhos de Carlos Quente brilharam. Colocou à pressa umas pontas de borracha nas orelhas e perguntou:

- "Oh netinho Comodoro, será que não me arranjas um lugar de oficial cientista na tua nave espacial ? É o que seria lógico."

E, inexplicavelmente, fechou os dedos da mão direita com toda a força na clavícula do Comodoro.

Assim cai o pano sobre as aventuras da família Gaudêncio, que deseja a todos Boas Festas e Excelentes Notas nos exames que se aproximam, especialmente o de AMIII. E quem sabe se um dia, futuros autarcas, não ireis alguns de vós necessitar de uma destreza comparável à que os nossos heróis demonstraram nas suas aventuras ?

Resolução

a) Queremos mostrar que a função $f(x,y,z) = z\text{sen}^2(z)\exp(-z^2+x^2+y^2)$ é integrável no semi-cilindro infinito $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1,\ z > 0\}$.

O problema vem do facto de V ser uma região ilimitada. Vamos então considerar os cilindros finitos $V_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ k \geq z \geq 0\}$. Podemos definir uma sucessão de funções $\{f_k\}$ tal que $f_k(x,y,z) = f(x,y,z)$ se $(x,y,z) \in V_k$, e $f_k(x,y,z) = 0$ caso contrário.

Seja $h(x,y,z) = z\exp(-z^2+x^2+y^2)$.

Temos que $\lim_{k\to\infty} f_k(x,y,z) = f(x,y,z)$ em V. Também vale que $|f_k(x,y,z)| \leq h(x,y,z)$ em V. Por outro lado, para qualquer k, a função f_k é contínua e limitada no interior do compacto V_k e anula-se fora de V_k. Logo, as funções f_k são integráveis em V, i.e. $f_k \in L(V)$.

Se mostrarmos que a função h é integrável em V, então como $|f| \leq h$, f será também integrável em V. Além disso, nesse caso, teremos pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_V f = \int_V \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty}\int_V f_k = \lim_{k\to\infty}\int_{V_k} f.$$

Para mostrar que $h \in L(V)$ vamos utilizar o teorema da convergência monótona de Levi. Consideramos a sucessão $\{h_k\}$ com $h_k = h$ em V_k e $h_k = 0$ fora de V_k. A sucessão $\{h_k\}$ é monótona crescente porque h é positiva. Além disso, $\lim_{k\to\infty} h_k(x,y,z) = h(x,y,z)$ em V.

Por outro lado,

$$\int_V h_k = \int_{V_k} h = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^k \rho h(\rho,\theta,z)\,d\theta d\rho dz = 2\pi(\int_0^k z\exp(-z^2)dz)(\int_0^1 \rho\exp(\rho^2)d\rho) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi(-\exp(-z^2))|_0^k(\exp(\rho^2))|_0^1 = \frac{\pi}{2}(e-1)(1-e^{-k^2}) \leq \frac{\pi}{2}(e-1).$$

Logo, a sucessão $\{\int_V h_k\}$ é limitada e, pelo TCML, $h \in L(V)$. Concluímos então, como já vimos acima, que $f \in L(V)$ e que se tem

$$\int_V f = \lim_{k\to\infty}\int_{V_k} f = \pi(e-1)\lim_{k\to\infty}\int_0^k z\text{sen}^2(z)\exp(-z^2)dz.$$

Portanto, como seria de esperar, a menina Lucialima é que tem razão.

b) Temos a coordenada x da posição da nave do Comodoro em função do tempo $x(t) = \int_0^{(1+t)^2}(s^2+st+e^s)ds$. A velocidade na direcção x será $v_x(t) = \frac{dx}{dt}(t)$. Queremos calcular $v_x(0)$. A região de integração é compacta e a integranda é contínua, logo a regra de Leinbiz pode ser aplicada.

Seja $\phi(t,a) = \int_0^a(s^2+st+e^s)ds$. Temos $x(t) = \phi(t,(1+t)^2)$. Quando $t=0$ temos $(1+t)^2 = 1$. Logo,

$$v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(0,1) + \frac{\partial\phi}{\partial a}(0,1)\frac{da}{dt}(0).$$

Pela regra de Leibnitz,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,1) = \int_0^1 \frac{\partial(s^2+st+e^s)}{\partial t}ds = \int_0^1 sds = 1/2.$$

Por outro lado, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\frac{\partial\phi}{\partial a}(0,1)\frac{da}{dt}(0) = (s^2+st+e^s)|_{s=1}\frac{da}{dt}(0) = 2(s^2+st+e^s)|_{s=1,t=0} = 2(1+e).$$

Concluímos que $v(0) = 1/2 + 2(1+e) = 5/2 + 2e$. O Comodoro ia mesmo no limite.