Análise Matemática III
1º semestre de 2001/02

Exercício Teste 1

Considere o sólido S definido por,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1 - x^2 - y^2\,;\, y > 0\,;\, x > y\}.$$

Descreva detalhadamente os cortes de S perpendiculares aos eixos coordenados.

Solução: O sólido S é uma secção de um cone com uma bola de gelado. Como o vértice do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ é o ponto $(0, 0, 1)$, a coordenada z assume todos os valores do intervalo $[0, 1]$. Seja $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,*i.e.*, ρ é a distância ao eixo Oz. Resolvendo a equação $\rho^2 + \rho - 1 = 0$, conclui-se que a bola de gelado e o cone se intersectam numa circunferência de raio $R = (\sqrt{5} - 1)/2$, contida no plano $z = R$.

Assim, para os cortes perpendiculares ao eixo Oz há dois casos a considerar: $z \in [0, R]$ e $z \in [R, 1]$. No primeiro caso o corte é limitado pela intersecção com o cone, enquanto no caso segundo o corte é limitado pela intersecção com a bola. As figuras 1 e 2 ilustram estes cortes.

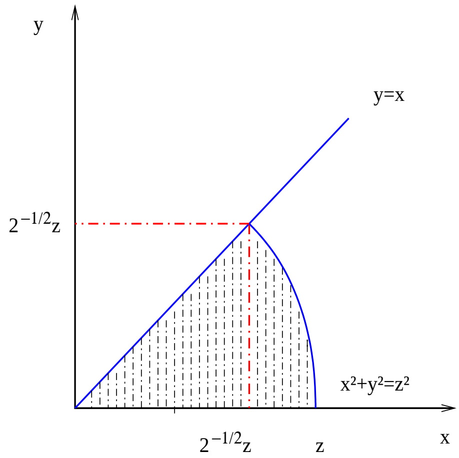

Figura 1: Corte perpendicular ao eixo Oz, com $z \in [0, R]$

Das figuras 1 e 2, concluímos que, em S, x varia entre 0 e R. Para cortes perpendiculares ao eixo Ox há também dois casos a considerar: $x \in [0, \frac{R}{\sqrt{2}}]$ e $x \in [\frac{R}{\sqrt{2}}, R]$. No primeiro caso a figura que se obtém é limitada à direita pela intersecção com o plano $x = y$ e, no segundo caso, a figura é limitada à direita pela intersecção com a bola e o cone. As figuras 3 e 4 ilustram estes cortes.

Analisando de novo as figuras 1 e 2, concluímos que y varia entre 0 e $R/\sqrt{2}$, em S. Para os cortes perpendiculares ao eixo Oy há apenas um caso a considerar, que é ilustrado pela figura 5

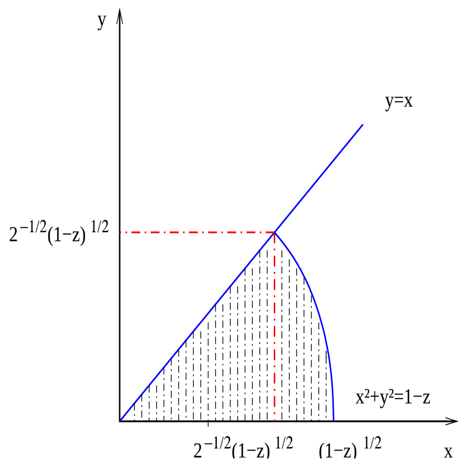

Figura 2: Corte perpendicular ao eixo Oz, com $z \in [R, 1]$

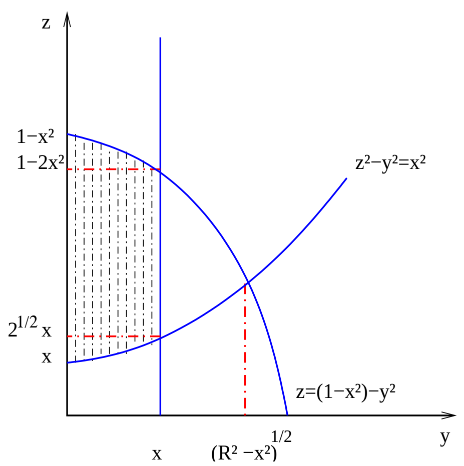

Figura 3: Corte perpendicular ao eixo Ox, com $x \in [0, \frac{R}{\sqrt{2}}]$

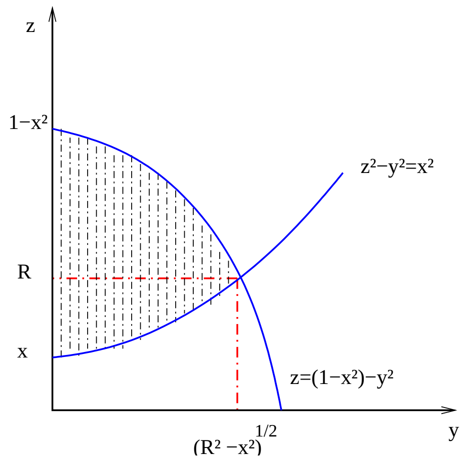

Figura 4: Corte perpendicular ao eixo Ox, com $x \in [\frac{R}{\sqrt{2}}, R]$

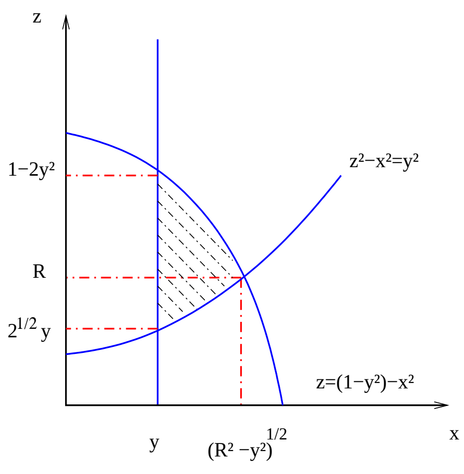

Figura 5: Corte perpendicular ao eixo Oy, $y \in [0, \frac{R}{\sqrt{2}}]$