Análise Matemática III
1º semestre de 2001/02

Exercício Teste 3

No ano de 2075 o Comodoro Gaudêncio IV, bisneto do Sr. Gaudêncio do exercício anterior, é escolhido, por ter tido boa nota a AMIII, como engenheiro responsável pelo abastecimento de ar a naves espaciais. Sabendo que uma nave espacial, quando está parada na estação orbital, ocupa a seguinte região (a unidade de escala é o metro):

$$\begin{aligned} A = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad & 0 \le x \le 4 - \frac{1}{50}(y^2+z^2) \text{ se } y^2+z^2 \le 100 \ ; \\ & 0 \le x \le 2 - \frac{1}{100}(y^2+z^2) \text{ se } y^2+z^2 > 100 \Big\} \ . \end{aligned}$$

Escreva as expressões que o Comodoro Gaudêncio IV deve obter para a massa de ar (em kg) necessária para a nave espacial (a densidade do ar na nave espacial deve ser de 1.2 kg/m^3):

a) integrando primeiro em ordem a z, depois em ordem a y e por fim em ordem a x (isto é $\int_{\dots}^{\dots}(\int_{\dots}^{\dots}(\int_{\dots}^{\dots} c\ dz)dy)dx$, onde c é uma constante que também deve determinar).

b) integrando primeiro em ordem a z, depois em ordem a x e por fim em ordem a y (isto é $\int_{\dots}^{\dots}(\int_{\dots}^{\dots}(\int_{\dots}^{\dots} c\ dz)dx)dy$).

Solução:

a) A massa de ar é $M = 1.2 \int_A \ dxdydz$. Os cortes da nave espacial com planos perpendiculares ao eixo Ox, $0 < x < 4$, são discos com centro na origem e raio $R(x)$ dado por

$$R(x) = \begin{cases} 10\sqrt{2-x} & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 10 & \text{se } 1 \le x \le 2 \\ \sqrt{50(4-x)} & \text{se } 2 \le x \le 4 \ . \end{cases} \tag{1}$$

A massa é então dada por

$$\begin{aligned} M &= 1.2 \int_0^4 \left(\int_{-R(x)}^{R(x)} \left(\int_{-\sqrt{R^2(x)-y^2}}^{\sqrt{R^2(x)-y^2}} 1\ dz \right) dy \right) dx = \\ &= 1.2 \times 4 \int_0^4 \left(\int_0^{R(x)} \left(\int_0^{\sqrt{R^2(x)-y^2}} 1\ dz \right) dy \right) dx \end{aligned}$$

e portanto, tendo em conta (1), temos

$$\begin{aligned} M &= 4.8 \int_0^1 \left(\int_0^{10\sqrt{2-x}} \left(\int_0^{\sqrt{100(2-x)-y^2}} 1\ dz \right) dy \right) dx + \\ &+ 4.8 \int_1^2 \left(\int_0^{10} \left(\int_0^{\sqrt{100-y^2}} 1\ dz \right) dy \right) dx + \\ &+ 4.8 \int_2^4 \left(\int_0^{\sqrt{50(4-x)}} \left(\int_0^{\sqrt{50(4-x)-y^2}} 1\ dz \right) dy \right) dx \end{aligned}$$

b) Os cortes de A com planos perpendiculares ao eixo Oy, $0 \leq y \leq 10\sqrt{2}$, estão representados nas figuras 1 e 2 (com o eixo Ox orientado verticalmente para cima e o eixo Oz horizontal).

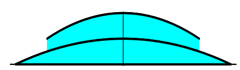

Figura 1: Corte perpendicular ao eixo Oy, com $y \in [0, 10]$

Figura 2: Corte perpendicular ao eixo Oy, com $y \in [10, 10\sqrt{2}]$

Das figuras concluímos que, na ordem de integração proposta, a massa de ar é dada por

$$\begin{aligned} M &= 4.8 \int_0^{10} \left[\int_0^1 \int_0^{\sqrt{100(2-x)-y^2}} 1 \; dzdx + \right. \\ &+ \left. \int_1^2 \int_0^{\sqrt{100-y^2}} 1 \; dzdx + \int_2^{4-\frac{1}{50}y^2} \int_0^{\sqrt{50(4-x)-y^2}} 1 \; dzdx \right] dy + \\ &+ 4.8 \int_{10}^{10\sqrt{2}} \int_0^{2-\frac{1}{100}y^2} \int_0^{\sqrt{100(2-x)-y^2}} 1 \; dzdxdy \end{aligned}$$