Análise Matemática III
1º semestre de 2001/02

Exercício Teste 4

Jack Gaudêncio é sobrinho do senhor Gaudêncio do exercício 2, trabalha num Dunkin Donuts na Ferry Street, em Newark, e é um apaixonado por física. Um dia, enquanto estudava para a cadeira de Physics 331, Jack resolveu calcular o momento de inércia I_L de um dos seus donuts preferidos em relação a um eixo natural de simetria L. Após observação atenta à saída do forno, concluiu que o donut tem a forma do seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 \leq 1\},$$

sendo L o eixo Oz. Atendendo à composição peculiar do donut, que envolve vários tipos de recheio e cobertura, Jack determinou que a função densidade de massa de D é dada por $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2}$. Determine o valor do momento de inércia I_L que Jack deveria ter obtido.

Solução: Como Jack bem sabe, o momento de inércia I_L obtém-se calculando o integral triplo seguinte

$$I_L = \iiint_D (x^2 + y^2)\sigma(x, y, z) dx\, dy\, dz.$$

O *donut* D é um sólido com simetria cilíndrica pelo que resolveu imediatamente usar *coordenadas cilíndricas*. Depois de algum tempo, lembrou-se que o Jacobiano destas coordenadas é ρ e obteve

$$I_L = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^{1} \left(\int_{3-\sqrt{1-z^2}}^{3+\sqrt{1-z^2}} \rho^2 \sqrt{1 - (\rho - 3)^2)}\, \rho\, d\rho \right) dz \right) d\theta.$$

Apesar de ser um cromo a Math 303 (*i.e.* AMIII), Jack achou este integral complicado. Foi então que pensou “Dude, this is like easy” e resolveu inverter a ordem de integração de z e ρ, obtendo

$$\begin{aligned}
I_L &= \int_0^{2\pi} \left(\int_2^4 \left(\int_{-\sqrt{1-(\rho-3)^2}}^{\sqrt{1-(\rho-3)^2}} \rho^2 \sqrt{1 - (\rho - 3)^2}\, \rho\, dz \right) d\rho \right) d\theta \\
&= 2\pi \int_2^4 2\rho^3 (1 - (\rho - 3)^2) d\rho \\
&= 4\pi \int_2^4 (6\rho^4 - \rho^5 - 8\rho^3) \\
&= 4\pi \left[\frac{6\rho^5}{5} - \frac{\rho^6}{6} - 2\rho^4 \right]_2^4 \\
&= \frac{768}{5}\pi.
\end{aligned}$$