Análise Matemática III
1º semestre de 2001/02

Episódio 7

Há muitos muitos anos, numa galáxia muito muito distante, Luke Gaudêncio estudava as artes Jedi com o Mestre Yoda. Depois de vários testes de destreza física e mental (que incluiram o cálculo de integrais iterados em 11 variáveis), o Mestre Yoda, dirigindo-se a Luke, perguntou

— Luke, a **Força** sentes ?

Luke concentrou-se e escreveu a seguinte expressão no seu bloco de notas Jedi

$$F(x,y,z) = e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} (x,y,z).$$

Dirigindo-se de novo a Luke, Mestre Yoda perguntou

— Conservativa a **Força** é ?

Quando Luke se preparava para responder, Yoda interrompeu-o

— Próximo o Darth Gaudêncio está. A perturbação na **Força** sentes ?

Luke concentrou-se e desta vez escreveu

$$F_D(x,y,z) = e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} (x,y,z) + \frac{1}{(x-10^7)^2+y^2} (-y, x-10^7, 0)$$

Quando olhou de novo para o Mestre, este perguntou-lhe

— E agora, Luke, conservativa a **Força** é ?

(a) Responda à segunda pergunta de Yoda. Ou seja, determine se a **Força** na ausência de Darth Gaudêncio (o campo $F(x,y,z)$) é um gradiente. Se for, calcule um potencial.

Solução: Seja $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Notando que $\nabla(r) = r^{-1}(x,y,z)$, vem

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-r}x}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{xy(r+1)e^{-r}}{r^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-r}x}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{xz(r+1)e^{-r}}{r^3} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-r}y}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{yz(r+1)e^{-r}}{r^3} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{cases}$$

Portanto F é um campo fechado. Como F é um campo de classe C^1 e o seu domínio, $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, é simplesmente conexo, concluímos que F é um gradiente. Da igualdade

$$F(x,y,z) = e^{-r}\nabla(r),$$

segue imediatamente $F = \nabla(-e^{-r})$, pelo que $\phi = -e^{-r}$ é um potencial para F.

(b) Responda à quarta pergunta de Yoda. Ou seja, determine se a **Força** na presença de Darth Gaudêncio (o campo $F_D(x, y, z)$) é um gradiente. Se for, calcule um potencial.

Solução: Seja $G(x, y, z) = ((x - 10^7)^2 + y^2)^{-1}\,(-y, x - 10^7, 0)$. Uma vez que $F_D = F + G$ e, de acordo com a resposta à alínea (a), F é um gradiente, concluímos que F_D é um gradiente se e só se G o for. É fácil de verificar que G é um campo fechado. No entanto não podemos daí concluir que G é gradiente pois o seu domínio não é simplesmente conexo. De facto, o domínio de G é

$$D(G) = \mathbb{R}^3 \setminus L,$$

onde $L = \{(10^7, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$, portanto os caminhos que dão a volta a L não são homotópicos a um caminho constante. Consideremos então o caminho $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ definido por $\alpha(t) = (\cos(t) + 10^7, \operatorname{sen}(t), 0)$. Temos

$$\int G \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0) \cdot (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)dt = 2\pi \neq 0,$$

logo G não é um gradiente e portanto F_D também não é um gradiente.