Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

7 de Novembro de 2002

Resolução Sumária

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$$

(2 val.) (a) Prove que M é uma variedade.

(2.5 val.) (b) Determine a equação do plano tangente a M no ponto $(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$.

(3 val.) (c) Determine os pontos de M mais próximos da origem.

Resolução:

(a) Seja F a função de classe C^1 dada por $F(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 1$. Temos $M = F^{-1}(0)$ e $\operatorname{rank} DF(x,y,z) = \operatorname{rank}\left[\, 4x^3 \ 4y^3 \ 4z^3 \,\right] = 1$, $\forall (x,y,z) \neq \mathbf{0}$. Como $\mathbf{0} \notin M$, M é uma variedade-2.

(b) O plano tangente a M em $\mathbf{p} = (\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$ é perpendicular ao vector $\nabla F(\mathbf{p}) = 4 \cdot 3^{-\frac{3}{4}}(1,1,1)$ e passa em $\mathbf{p}$. Portanto tem equação

$$\nabla F(\mathbf{p}) \cdot \left(x - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, y - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, z - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) + \left(y - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) + \left(z - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = 0.$$

(c) O problema é equivalente a determinar os pontos de mínimo da restrição a M da função de classe C^1, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Uma vez que M é compacta (pois $M = F^{-1}(0)$ e $F(x,y,z) \xrightarrow[\|(x,y,z)\| \to \infty]{} \infty$), $f|_M$ tem máximo e mínimo. Para determinar os candidatos a pontos de extremo, aplicamos os método dos multilicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} (\nabla f)(x,y,z) + \lambda (\nabla F)(x,y,z) = \mathbf{0} \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(|x|,|y|,|z|) \in \left\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, (0, \tfrac{1}{\sqrt[4]{2}}, \tfrac{1}{\sqrt[4]{2}}), (\tfrac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt[4]{2}}), (\tfrac{1}{\sqrt[4]{2}}, \tfrac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0), (\tfrac{1}{\sqrt[4]{3}}, \tfrac{1}{\sqrt[4]{3}}, \tfrac{1}{\sqrt[4]{3}})\right\}.$$

Calculando o valor de f nos pontos acima, concluímos que os pontos de M mais próximos da origem são $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$ e $(0, 0, \pm 1)$.

2. Considere o conjunto mensurável à Jordan

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+(z-2)^2 \le 1\ ,\ \sqrt{x^2+y^2}-1 \le z \le 2,\ x,y \ge 0\right\}$$

(3.5 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\displaystyle\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz.$

(3.5 val.) (b) Seja $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Calcule $\iiint_S f dV_3$.

Resolução:

(a)

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(S) = &\int_1^2 \left(\int_0^{2-\sqrt{1-(z-2)^2}} \left(\int_{\sqrt{\left(2-\sqrt{1-(z-2)^2}\right)^2-y^2}}^{\sqrt{(z+1)^2-y^2}} 1dx\right) dy\right) dz \\ &+ \int_1^2 \left(\int_{2-\sqrt{1-(z-2)^2}}^{z+1} \left(\int_0^{\sqrt{(z+1)^2-y^2}} 1dx\right) dy\right) dz.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\iiint_S f dV_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \left(\int_{2-\sqrt{1-(z-2)^2}}^{z+1} \frac{\rho-2}{\rho}\rho d\rho\right) dz\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\int_1^2 \left[\frac{(\rho-2)^2}{2}\right]_{\rho=2-\sqrt{1-(z-2)^2}}^{\rho=z+1} \\ &= \frac{\pi}{4}\int_1^2 \left((z-1)^2-1+(z-2)^2\right) dz \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\left[\frac{(z-1)^3}{3}\right]_1^2 - 1 + \left[\frac{(z-2)^3}{3}\right]_1^2\right) \\ &= -\frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

(2.5 val.) **3.** Sejam $M, N \subset \mathbb{R}^3$ variedades-2 diferenciáveis (*i.e.*, superfícies) compactas e disjuntas. Sejam $\mathbf{p} \in M$ e $\mathbf{q} \in N$, tais que a distância $\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|$ é mínima. Mostre que o plano tangente a M em $\mathbf{p}$ é paralelo ao plano tangente a N em $\mathbf{q}$.

Resolução: O conjunto $M \times N \subset \mathbb{R}^6$ é uma variedade-4: sejam $F\colon U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $G\colon V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 tais que $M \cap U = F^{-1}(0)$, $N \cap V = G^{-1}(0)$ e $\operatorname{rank} DF = \operatorname{rank} DG = 1$. Definindo $\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y}))$, $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in V$, temos $\operatorname{rank} D\mathbf{H} = 2$ (pois $D\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} DF(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & DG(\mathbf{y})\end{bmatrix}$) e $(M \times N) \cap (U \times V) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{0})$.

O ponto $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in M \times N$ é um ponto de mínimo da restrição a $M \times N$ da função $h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Sejam $U \ni \mathbf{p}$ e $V \ni \mathbf{q}$ conjuntos abertos para os quais existem $F\colon U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $G\colon V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como acima e defina-se $\mathbf{H}$ como anteriormente. Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\nabla h(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \lambda_1 \nabla H^1(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \lambda_2 \nabla H^2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{0},$$

ou seja

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2(\mathbf{p}-\mathbf{q}) & = -\lambda_1 \nabla F(\mathbf{p}) \\ 2(\mathbf{q}-\mathbf{p}) & = -\lambda_2 \nabla G(\mathbf{q}) \end{array} \right. ,$$

pois $\nabla h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{y}-\mathbf{x})$. Como $T_{\mathbf{p}}M \perp \nabla F(\mathbf{p})$, $T_{\mathbf{q}}N \perp \nabla G(\mathbf{q})$ e $\mathbf{p}-\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ (pois M e N são disjuntas), concluímos que $T_{\mathbf{p}}M$ é paralelo a $T_{\mathbf{q}}N$.

(3 val.) **4.** Mostre directamente a partir de definição de mensurabilidade à Jordan que, se $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável à Jordan com medida nula, então $\mathrm{Vol}_n(S) = 0$.

Resolução: Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto tal que $S \subset I$. Temos de mostrar que $\int_I \chi_S = 0$. Seja $0 \leq s \leq \chi_S$ uma função em escada e seja P uma partição de I tal que s é constante no interior dos subintervalos de P. Como S tem medida nula, temos $\chi_S = 0$ *q.t.p* em I e portanto $s = 0$ *q.t.p* em I. Seja J um subintervalo de P. Como s é constante em $\mathrm{int}(J)$ e $s = 0$ *q.t.p*, tem que ser $s = 0$ em $\mathrm{int}(J)$ (pois $\mathrm{int}(J)$ não tem medida nula). Concluímos que $\int_I s = 0$, para toda a função em escada $0 \leq s \leq \chi_S$, donde segue $\int_I \chi_S = 0$.