Resumos de AMIII

14 de Dezembro de 2002

I. Revisões de Cálculo Diferencial

1. *Notação:* os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^n$ são denotados por $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ e as funções coordenadas por $x^1, \ldots, x^n$.
2. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$ uma função (portanto $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^m)), \mathbf{x}_0 \in U$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ então a *derivada direccional* de $\mathbf{f}$ segundo $\mathbf{v}$ no ponto $\mathbf{x}_0$ é
$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})|_{t=0}.$$
3. A i-ésima *derivada parcial* de $\mathbf{f}$ é
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^i} \equiv D_i\mathbf{f} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^i} \\ \ldots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} D_i f^1 \\ \ldots \\ D_i f^n \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} D_{\mathbf{e}_i}\mathbf{f}.$$
4. $\mathbf{f}$ diz-se *diferenciável* em $\mathbf{x}_0$ se existe uma transformação linear $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (representada por uma matriz $m \times n$) tal que
$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$
5. Se $\mathbf{f}$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0$ então
$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}.$$
Em particular, $D\mathbf{f}$ é representada na base canónica pela *matriz Jacobiana*
$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 f^1 & \ldots & D_n f^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D_1 f^m & \ldots & D_n f^m \end{bmatrix}.$$
6. $\mathbf{f}$ diz-se de classe C^1 se as derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ são funções de contínuas. Mais geralmente, diz-se que f é de classe C^r se as suas derivadas parciais são funções de classe C^{r-1}.

7. $\mathbf{f}$ C^1 $\Rightarrow$ $\mathbf{f}$ diferenciável.
8. Se $\mathbf{f}\colon \mathbb{R} \to E^n$ é diferenciável, $\mathbf{f}(t) = (f^1(t), \ldots, f^n(t))$, então $\mathbf{f}$ parametriza uma curva em E^n, e

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{df^1}{dt} \\ \ldots \\ \frac{df^n}{dt} \end{bmatrix} \equiv \frac{d\mathbf{f}}{dt}$$

é um vector tangente à curva.
9. Se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então f diz-se um *campo escalar*, e

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

pode ser identificada com o vector

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}),$$

dito o *gradiente* de f.
10. Os *pontos críticos* de uma função diferenciável $f\colon U \to \mathbb{R}$ (onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto) são os pontos $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ tais que $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.
11. *Derivadas de ordem superior:* dada uma função $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que tem derivadas parciais, $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, as suas derivadas de segunda ordem (se existirem) são as funções

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} := \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right).$$

Também se utiliza a notação $D_{ij}f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$ (note-se que a ordem dos índices é invertida). Em geral, tem-se

$$D_{i_1 \cdots i_k} f \equiv \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_k} \cdots \partial x^{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{i_{k-1}} \cdots \partial x^{i_1}}\right).$$

12. *Lema de Schwarz.* Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

13. *Matriz Hessiana* de f, em $\mathbf{p} \in U$: é a matriz cuja entrada da linha i, coluna j é a derivada parcial $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(\mathbf{p})$. É denotada por $H_{\mathbf{p}}(f)$ ou simplesmente $H_{\mathbf{p}}$, se não houver possibilidade de confusão. O lema de Schwarz diz que, se f é de classe C^2, então $H_{\mathbf{p}}(f)$ é uma matriz simétrica.
14. *Derivação da função composta.* Se $\mathbf{g}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{p} \in U$ e $\mathbf{f}\colon V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $\mathbf{g}(\mathbf{p}) \in V$, então $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ é diferenciável em $\mathbf{p}$ e tem-se $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{p}) = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{p})) \circ D\mathbf{g}(\mathbf{p})$. Em termos das entradas das matrizes jacobianas, vem

$$\boxed{D_j(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})^i(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{m} D_k f^i(\mathbf{g}(\mathbf{p})) D_j g^k(\mathbf{p})}.$$

Esta fórmula é habitualmente designada por *Regra da Cadeia*.

15. *Fórmula de Talor* de ordem k de uma função $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^k, em torno de $\mathbf{x} \in U$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) =& f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(\mathbf{x}) h^i + \frac{1}{2} \sum_{i_1,i_2=1}^{n} D_{i_1 i_2} f(\mathbf{x}) h^{i_1} h^{i_2} \\ &+ \cdots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} D_{i_1\cdots i_k} f(\mathbf{x}) h^{i_1} \cdots h^{i_k} + R_k(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

onde $R_k(\mathbf{h})$ é $o(\|\mathbf{h}\|^k)$, ou seja, $\frac{R_k(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^k} \xrightarrow[\mathbf{h}\to\mathbf{0}]{} \mathbf{0}$.

16. Um máximo (mínimo) local de $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um ponto $\mathbf{x} \in D$ tal que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y})$ (respectivamente $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$), para todo o $\mathbf{y}$ numa vizinhança de $\mathbf{x}$. Se D é um conjunto aberto, f é diferenciável e tem um extremo local em $\mathbf{x}$, então $\mathbf{x}$ é um *ponto crítico* de f.

17. Uma matriz *simétrica* H diz-se
    (a) *definida positiva* se $\langle H\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle > 0$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$;
    (b) *semi-definida positiva* se $\langle H\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \geq 0$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$;
    (c) *definida negativa* se $\langle H\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle < 0$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$;
    (d) *semi-definida negativa* se $\langle H\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \leq 0$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$;
    (e) *indefinida* se existem $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ tais que $\langle H\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle > 0$ e $\langle H\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle < 0$.

18. *Critério de segunda ordem para classificar pontos críticos* de $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^2. Num *ponto crítico*, $\mathbf{x} \in U$, de f, tem-se

$H_{\mathbf{x}}(f)$ é definida positiva	$\Rightarrow$	$\mathbf{x}$ é ponto de mínimo
$H_{\mathbf{x}}(f)$ é definida negativa	$\Rightarrow$	$\mathbf{x}$ é ponto de máximo
$H_{\mathbf{x}}(f)$ é indefinida	$\Rightarrow$	$\mathbf{x}$ é ponto de sela
$H_{\mathbf{x}}(f)$ é semi-definida positiva	$\Rightarrow$	$\mathbf{x}$ não é ponto de máximo
$H_{\mathbf{x}}(f)$ é semi-definida negativa	$\Rightarrow$	$\mathbf{x}$ não é ponto de mínimo

Nota: um ponto de sela é um ponto crítico que não é ponto de extremo local.

II. Função Inversa e Função Implícita

1. O *jacobiano* da função diferenciável $\mathbf{f}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é o campo escalar

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

2. *Teorema da Função Inversa:* Seja $\mathbf{f}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e seja $\mathbf{x}_0 \in U$ tal $J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Nestas condições,

   (a) existem abertos $V \subset U$ e $W \subset \mathbb{R}^n$ tais que $\mathbf{x}_0 \in V$, $\mathbf{f}$ é injectiva em V e $W = \mathbf{f}(V)$;

   (b) seja $\mathbf{g} = (\mathbf{f}|_V)^{-1}$ (cuja existência é garantida por (a)), então $\mathbf{g}$ é de classe C^1 e tem-se

$$\boxed{D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)]^{-1}}$$

   Notação: Quando $\mathbf{f}$ satisfaz as condições do teorema diz-se, abreviadamente, que $\mathbf{f}$ é *localmente C^1-invertível* em $\mathbf{x}_0$.

3. *Teorema da Função Implícita:* Seja $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1 e $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ e $\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$. Então existe uma vizinhança $U \times V \ni (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ e uma função de classe C^1, $\mathbf{f}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ tais que

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V \mid \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

4. Nas condições do Teorema da Função Implícita, a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{x}_0$ pode ser calculada a partir de

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0.$$

III. Variedades Diferenciáveis

1. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma *variedade diferenciável de dimensão* $d \in \{0, \ldots, n\}$ (e classe C^q, $q \geq 1$) se para qualquer ponto $\mathbf{p} \in M$ existe uma vizinhança $U \ni \mathbf{p}$ e uma função de classe C^q, $\mathbf{F}\colon U \to \mathbb{R}^{n-d}$, tais que
   (a) $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$;
   (b) $\operatorname{rank} D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = n - d$ (i.e., é máximo) para todo o $\mathbf{x} \in U$.
2. Uma variedade de dimensão 0 é simplesmente um conjunto do pontos isolados; uma variedade de dimensão n é simplesmente um conjunto aberto.
3. $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão d (e classe C^q) *sse* para qualquer ponto $\mathbf{p} \in M$ existe uma vizinhança $U \ni \mathbf{p}$ e uma função de classe C^q, $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n-d}$, tais que
$$M \cap U = \mathrm{Graf}(\mathbf{f}) \cap U.$$
   Ou seja, uma variedade de dimensão d é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que é localmente o gráfico de uma função $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n-d}$ (e portanto *"é localmente como* $\mathbb{R}^d$*"*).
4. Um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é um *vector tangente* à variedade M no ponto $\mathbf{p}$ se existe uma função $\boldsymbol{\gamma}\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ tal que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{p}$ e $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(0) = \mathbf{v}$.
5. O conjunto $T_{\mathbf{p}}M$ de todos os vectores tangentes à variedade M em $\mathbf{p}$ é um espaço vectorial de dimensão d, dito o *espaço tangente* a M no ponto $\mathbf{p}$. O seu complemento ortogonal $T_{\mathbf{p}}^{\perp}M := (T_{\mathbf{p}}M)^{\perp}$ é um espaço vectorial de dimensão $n - d$, dito o *espaço normal* a M no ponto $\mathbf{p}$.
6. Se $M = \{\mathbf{x} \in U \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ numa vizinhança $U \ni \mathbf{p}$ então
$$\begin{aligned} T_{\mathbf{p}}^{\perp}M &= \operatorname{span}\{\nabla F^1(\mathbf{p}), \ldots, \nabla F^{n-d}(\mathbf{p})\} \\ T_{\mathbf{p}}M &= \ker D\mathbf{F}(\mathbf{p}). \end{aligned}$$
7. *Teorema dos Extremos Condicionados:* Sejam $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade d-dimensional. Se a restrição de f a M tem um extremo local em $\mathbf{p} \in M$ então $\nabla f(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}^{\perp}M$.
8. *Regra dos Multiplicadores de Lagrange:* Nas condições do teorema anterior, existem constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$ (os *multiplicadores de Lagrange*) tais que
$$\boxed{\nabla(f + \lambda_1 F^1 + \ldots + \lambda_{n-d}F^{n-d})(\mathbf{p}) = \mathbf{0}}$$

IV. Integrais Múltiplos

1. $I \subset \mathbb{R}^n$ é um intervalo se $I = I_1 \times \cdots \times I_n$, onde $I_j \subset$ é um intervalo, $j = 1, \ldots, n$. I é limitado (fechado) sse I_j é limitado (respectivamente, fechado), $j = 1, \ldots, n$. Uma partição de um intervalo compacto $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ é um conjunto finito $P = P_1 \times \cdots \times P_n$, onde $P_j \subset \mathbb{R}$ é uma partição de I_j, $j = 1, \ldots, n$. Uma partição $P \subset I$ divide I em subintervalos, ditos *subintervalos da partição*. Se $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, o volume n-dimensional de I é definido por

$$\mathrm{Vol}_n(I) = (b_1 - a_1) \times \cdots (b_n - a_n).$$

Uma função $s \colon I \to \mathbb{R}$ diz-se *em escada* se existe uma partição P do intervalo I tal que s é constante com valor s_J no interior de cada subintervalo J de P. Define-se o integral da função em escada s por

$$\int_I s = \sum_{J \text{ subintervalo de } P} s_J \, \mathrm{Vol}_n(J).$$

2. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f \colon I \to \mathbb{R}$ uma função limitada. O *integral inferior*, $\underline{\int}_I f$, de f e o *integral superior*, $\overline{\int}_I f$, são definidos por

$$\underline{\int}_I f = \sup\left\{\int_I s \mid s \text{ é em escada, } s \leq f\right\}, \overline{\int}_I f \quad = \inf\left\{\int_I t \mid t \text{ é em escada, } f \leq t\right\}.$$

Se $\underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f$, diz-se que f é *integrável à Riemann* em I e o seu integral é

$$\int_I f = \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f.$$

3. *Teorema de Fubini:* Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ intervalos compactos e $f \colon A \times B \to \mathbb{R}$ uma função *integrável à Riemann* no intervalo $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Então,

$$\begin{aligned}\int_{A\times B} f dV_{m+n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \int_A \left(\underline{\int}_B f_{\mathbf{x}} dV_m(\mathbf{y})\right) dV_n(\mathbf{x}) = \int_A \left(\overline{\int}_B f_{\mathbf{x}} dV_m(\mathbf{y})\right) dV_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_B \left(\underline{\int}_A f_{\mathbf{y}} dV_n(\mathbf{x})\right) dV_m(\mathbf{y}) = \int_B \left(\overline{\int}_A f_{\mathbf{y}} dV_n(\mathbf{x})\right) dV_m(\mathbf{y})\end{aligned}$$

onde $f_{\mathbf{x}} \colon B \to \mathbb{R}$ e $f_{\mathbf{y}} \colon A \to \mathbb{R}$ satisfazem $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e todos os integrais existem.

4. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem *medida nula* se, para cada $\epsilon > 0$, existe uma colecção numerável de intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_j, \ldots$, tal que
   (a) $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} I_j$ (ou seja, $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura de A)
   (b) $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(I_j) < \epsilon$

5. *Critério de Integrabilidade:* Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto. Uma função limitada $f \colon I \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann sse o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.

6. *Propriedades de Conjuntos de Medida Nula:*
    i. Se A tem medida nula e $B \subset A$, então B tem medida nula;
    ii. a união numerável de conjuntos com medida nula tem medida nula;
    iii. o gráfico de uma função contínua $\mathbf{f}\colon : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é um subconjunto de medida nula de $\mathbb{R}^{m+n}$.
7. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é tal que $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, então A não tem medida nula.
8. Diz-se que uma propriedade se verifica *quase em toda a parte (q.t.p.)* se o conjunto dos pontos onde não se verifica tem medida nula. Por exemplo, uma função limitada é integrável à Riemann num intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$ sse é contínua *q.t.p.* em I.
9. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função integrável, então
    (a) $\int_I f = 0$, se $f = 0$ *q.t.p.*;
    (b) $f = 0$ *q.t.p.*, se $f \geq 0$ e $\int_I f = 0$.
10. Se $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado e $f : S \to \mathbb{R}^n$ é limitada, diz-se que f é integrável em S se a função

$$\overline{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S \\ 0, & \mathbf{x} \notin S \end{cases}$$

for integrável nalgum intervalo compacto $I \supset S$. Nesse caso, define-se $\int_S f := \int_I \overline{f}$. Esta definição não depende de I.

Em particular, diz-se que um conjunto limitado S é *mensurável à Jordan* se a função $f \equiv 1$ for integrável em S (neste caso, $\overline{f}$ designa-se por *função característica de* S e denota-se χ_S).
11. Um conjunto limitado S é *mensurável à Jordan* sse a sua fronteira ∂S tem medida nula.
12. *Propriedades do integral de Riemann em* $\mathbb{R}^n$*:* seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e sejam $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ funções limitadas.
    (a) *(Linearidade)*. Se f e g são integráveis em S e, então $af + bg$ é integrável em S, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, e

$$\int_S (af + bg) = a \int_S f + b \int_S g.$$

    (b) *(Comparação)*. Se f, g são integráveis em S e $f \leq g$, então

$$\int_S f \leq \int_S g.$$

    Além disso, $|f|$ é integrável em S e tem-se

$$\left| \int_S f \right| \leq \int_S |f|.$$

    (c) *(Aditividade)*. Se $S = S_1 \cup S_2$ com $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, então

$$\int_S f = \int_{S_1} f + \int_{S_2} f.$$

13. Uma *mudança de variáveis* em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathbf{g}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (A aberto) de classe C^1 tal que

(a) $\mathbf{g}$ é injectiva;

(b) $\det(D\mathbf{g}(\mathbf{x})) \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in A.$

Nota: Pelo Teorema da Função Inversa, $\mathbf{g}$ é uma mudança de variáveis sse $\mathbf{g}$ tem uma inversa de classe C^1. Também é habitual designar estas funções por *difeomorfismos*.

14. Exemplos de mudanças de variáveis:

    i. *coordenadas polares:* $\mathbf{g}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times]0,2\pi[$, $\det D\mathbf{g} = r$;

    ii. *coordenadas cilíndricas:* $\mathbf{g}(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z)$, $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times]0,2\pi[\times \mathbb{R}$, $\det D\mathbf{g} = \rho$;

    iii. *coordenadas esféricas:* $\mathbf{g}(r,\theta,\varphi) = (r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi)$, $(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times]0,2\pi \times]0,\pi[$, $\det D\mathbf{g} = -r^2\operatorname{sen}\varphi$.

15. *Teorema de Mudança de Variáveis:* Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{g} \colon A \to \mathbb{R}^n$ uma *mudança de variáveis* e $S \subset \mathbf{g}(A)$ um conjunto limitado. Se $f \colon S \to \mathbb{R}$ é integrável em S, então

$$\boxed{\int_S f dV_n = \int_{\mathbf{g}^{-1}(S)} (f \circ \mathbf{g}) |\det D\mathbf{g}| dV_n}$$

16. *Regra de Leibnitz:* Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto, seja $f \colon I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere-se a função

$$F(t) = \int_I f(\mathbf{x},t) dV_n(\mathbf{x}), \qquad t \in [a,b].$$

Então, se a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe e é contínua, F é diferenciável e tem-se

$$\boxed{\frac{dF}{dt}(t) = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x},t) dV_n(\mathbf{x}).}$$

V. Formas Diferenciais

1. Covectores

1. O *dual* de $\mathbb{R}^n$ é
$$(\mathbb{R}^n)^* = \{\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \omega \text{ é linear}\}.$$
Os elementos de $(\mathbb{R}^n)^*$ dizem-se *covectores-1*.
2. $(\mathbb{R}^n)^*$ é um espaço vectorial de dimensão n. Uma base para $(\mathbb{R}^n)^*$ é
$$\{dx^1, \ldots, dx^n\}$$
onde o covector-1 dx^i é definido por
$$dx^i\left(v^1\mathbf{e}_1 + \ldots + v^n\mathbf{e}_n\right) = v^i$$
(ou seja, $dx^i(\mathbf{e}_j) = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário).
3. Um *tensor-k* (covariante) é uma aplicação $T : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ multilinear, i.e., tal que
$$\begin{aligned} &T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) + T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k); \\ &T(\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = \lambda T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) \end{aligned}$$
($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$). $T^k(\mathbb{R}^n)$ designa o conjunto de todos os tensores-k em $\mathbb{R}^n$.
4. Um tensor-k $\omega \in T^k(\mathbb{R}^n)$ diz-se *alternante*, ou um *covector-k*, se
$$\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_k) = -\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$$
($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, $i, j = 1, \ldots, n$). $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ designa o conjunto de todos os covectores-k em $\mathbb{R}^n$.
5. $T^k(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vectorial e $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço vectorial de $T^k(\mathbb{R}^n)$.
6. Se $S \in T^k(\mathbb{R}^n)$ e $T \in T^l(\mathbb{R}^n)$, o seu *produto tensorial* $S \otimes T \in T^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ é dado por
$$S \otimes T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l) = S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)\, T(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l)$$
($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l \in \mathbb{R}^n$).
7. *Propriedades do produto tensorial:* Se S, T, U são tensores e $\lambda \in \mathbb{R}$ então
   i. $(S + T) \otimes U = S \otimes U + T \otimes U$;
   ii. $S \otimes (T + U) = S \otimes T + S \otimes U$;
   iii. $(\lambda S) \otimes T = \lambda(S \otimes T) = S \otimes (\lambda T)$;
   iv. $S \otimes (T \otimes U) = (S \otimes T) \otimes U$;
   v. $S \otimes T \neq T \otimes S$.
8. $\dim\left(T(^k(\mathbb{R}^n)\right) = n^k$, e uma base é $\left\{dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}\right\}_{i_1, \ldots, i_k = 1}^n$.

2. Se $T \in T^k(\mathbb{R}^n)$, define-se
$$\mathrm{Alt}(T)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \mathrm{sgn}(\sigma) T\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}\right)$$

3. *Propriedades de* Alt*:*

   i. Se $T \in T^k(\mathbb{R}^n)$ então $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$;

   ii. $\mathrm{Alt} : T^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ é linear;

   iii. Se $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ então $\mathrm{Alt}(\omega) = \omega$.

   (Por outras palavras, $\mathrm{Alt} : T^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ é uma projecção).

4. Se ω é um k-covector e η é um l-covector, o seu *produto exterior* é o (k+l)-covector

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!}\,\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

5. *Propriedades do produto exterior:* Se ω, η, α e β são covectores de graus apropriados então

   i. $\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta$;

   ii. $\omega \wedge (c\eta) = c(\omega \wedge \eta)$ com $c \in \mathbb{R}$;

   iii. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega$ para $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$,$\eta \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$;

   iv. $\omega \wedge (\alpha \wedge \beta) = (\omega \wedge \alpha) \wedge \beta$.

6. $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = k!\,\mathrm{Alt}\left(dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}\right)$

7. $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, e uma base é $\left\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right\}_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n}$.

VI. Formas diferenciais

1. Uma *forma-k diferencial*, de classe C^q, em $\mathbb{R}^n$ é uma função, de classe C^q, $\omega : \mathbb{R}^n \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ (i.e., $\omega(\mathbf{x}) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$). O conjunto das formas-k de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n$ designa-se por $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$.

2. Se $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é C^∞ e $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ então o *pull-back* de ω por $\mathbf{f}$ é a forma-k $\mathbf{f}^*\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ definida por

$$\mathbf{f}^*\omega(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \omega(\mathbf{f}(\mathbf{x}))(D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, \ldots, D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_k)$$

   para $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$.

3. *Propriedades do pull-back:* Se ω e η são formas de graus apropriados então

   i. $\mathbf{f}^*(\omega + \eta) = \mathbf{f}^*\omega + \mathbf{f}^*\eta$;

   ii. $\mathbf{f}^*(\omega \wedge \eta) = \mathbf{f}^*\omega \wedge \mathbf{f}^*\eta$.

4. Se $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ é uma forma-k,

$$\omega = \sum_{0 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \omega_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

   a sua *derivada exterior* é a forma-$(k+1)$

$$d\omega = \sum_{0 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

5. *Propriedades da derivada exterior:* Se ω e η são formas de graus apropriados então
   i. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$;
   ii. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, onde $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$;
   iii. $d(d\omega) = 0$ (abreviadamente, $d^2 = 0$);
   iv. $d(\mathbf{f}^*\omega) = \mathbf{f}^*(d\omega)$, onde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é C^∞.
6. Por definição, $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ e portanto as 0-formas $\Omega^0(\mathbb{R}^n)$ são as funções C^∞ $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se ω é uma forma-k e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é C^∞ tem-se
   i. $g \wedge \omega = g\omega$;
   ii. $\mathbf{f}^* g = g \circ \mathbf{f}$;
   iii. $dg = \dfrac{\partial g}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \dfrac{\partial g}{\partial x^n} dx^n$.

   (em particular, $d(x^i) = dx^i$, o que justifica esta notação).
7. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ diz-se *fechada* se $d\omega = 0$.
8. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ diz-se *exacta* se existe uma forma $\eta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega = d\eta$ (η diz-se um *potencial* para ω).
9. ω exacta $\Rightarrow$ ω fechada.
10. $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *em estrela* se existe um ponto $\mathbf{x}_0 \in A$ (dito o *centro*) tal que $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subset A$ para todo o $\mathbf{x} \in A$, onde
$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] = \{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) : t \in [0, 1]\}$$
    designa o segmento de recta de extremos $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}$.
11. *Lema de Poincaré:* Seja $\omega \in \Omega^k(U)$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Se U é em estrela e ω é fechada, então ω é exacta.

VII. Integração em Variedades

1. Parametrizações, Cartas e Orientabilidade

1. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão d, $\mathbf{x} \in M$ e $U \ni \mathbf{x}$ uma vizinhança aberta. Diz- se $\mathbf{g} \colon V \subset \mathbb{R}^d \to M \cap U$ é uma *parametrização* de classe C^q de $M \cap U$ se
   (i) $\mathbf{g}$ é uma bijecção de classe C^q;
   (ii) $\mathbf{g}^{-1} \colon M \cap U \to V$ é contínua;
   (iii) $\operatorname{rank} D\mathbf{g} = d$.
2. $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão d e classe C^q *sse* para todo o $\mathbf{x} \in M$ existe uma vizinhança aberta $U \ni \mathbf{x}$ e uma parametrização, de classe C^q, $\mathbf{g} \colon V \subset \mathbb{R}^d \to M \cap U$. Nestas condições, as colunas de $\mathbf{g}(\mathbf{t})$ formam uma base para $T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})}M$.
3. Se $\mathbf{g} \colon V \subset \mathbb{R}^d \to M \cap U$ é uma parametrização, a função contínua $\mathbf{g}^{-1} \colon M \cap U \to V$ diz-se uma *carta local*.
4. Sejam $\mathbf{g} \colon V \subset \mathbb{R}^d \to M \cap U$ e $\mathbf{h} \colon W \subset \mathbb{R}^d \to M \cap U$ duas parametrizações, e $\varphi : M \cap U \to V$ e $\psi : M \cap U \to W$ as respectivas cartas locais. Então a mudança de carta local $\psi \circ \mathbf{g} : V \to W$ é de classe C^q e $\det D\psi \circ \mathbf{g} \neq 0$.

5. Seja $L \subset \mathbb{R}^n$ uma subespaço linear de dimensão-d. Diz-se que um covector $\lambda \in \Lambda^d(\mathbb{R}^n)$ induz uma *orientação* em L se, para uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ de L, tem-se $\lambda(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d) \neq 0$. Se $\lambda, \gamma \in \Lambda^d(\mathbb{R}^n)$ induzem orientações em L e, para uma base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ de L, tem-se
$$\lambda(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)\gamma(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d) > 0,$$
diz-se que λ e γ induzem a *mesma orientação*. Caso contrário, diz-se que induzem *orientações opostas*.
6. Diz-se que uma forma $\mu \in \Omega^d(\mathbb{R}^n)$ induz uma *orientação* numa variedade-d $M \subset \mathbb{R}^n$ se, $\mu(\mathbf{x})$ induz uma orientação em $T_\mathbf{x}M$, $\forall \mathbf{x} \in M$. Quando existe μ nestas condições, diz-se que M é *orientável*. Diz-se que $\mu, \nu \in \Omega^d(\mathbb{R}^n)$ induzem a mesma orientação em M, se $\mu(\mathbf{x}), \nu(\mathbf{x})$ induzem a mesma orientação em $T_\mathbf{x}M$, $\forall \mathbf{x} \in M$.
7. *Exemplo:* $\mathbb{R}^n$ é uma variedade-n *orientável* com orientação induzida pela forma-n $\mu = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.
8. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-d. $\mu \in \Omega^d(\mathbb{R}^n)$ induz uma orientação em M *sse*, $\forall$ parametrização $\mathbf{g}\colon\ : V \subset \mathbb{R}^d \to M \cap U$, tem-se
$$\mathbf{g}^*\mu(\mathbf{t}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{t} \in V.$$
9. *Significado geométrico da orientação:*
   (i) Para uma curva $M \subset \mathbb{R}^n$, dar uma orientação é equivalente a escolher um sentido para M;
   (ii) Para uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$, dar uma orientação é equivalente a escolher um campo $\mathbf{n}$ unitário e normal a M. A correspondência é dada por
$$\mathbf{n} \mapsto \Omega_\mathbf{n} = n^1 dy \wedge dz + n^2 dz \wedge dx + n^3 dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Integrais em Variedades

1. Seja $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d \in \Omega^n(\mathbb{R}^d)$ e seja $V \subset \mathbb{R}^d$ um aberto. Se f for integrável à Riemann em V, define-se
$$\int_V \omega = \int_V f(\mathbf{x}) dV_d(\mathbf{x}).$$
Ou seja, $\int_V \omega = \int_V \omega(\mathbf{x})(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d) dV_d(\mathbf{x})$.
2. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-d *orientável*, com orientação induzida por $\mu \in \Omega^d(\mathbb{R}^n)$ e seja $\mathbf{g}\colon V \subset \mathbb{R}^n \to M \cap U$ uma parametrização para $M \cap U$ *compatível* com μ. Dada $\omega \in \Omega^d(\mathbb{R}^n)$, define-se
$$\int_{M \cap U} \omega = \int_V \mathbf{g}^*\omega,$$
se o integral existir.
3. *Independência da parametrização:* Nas condições do número anterior, se $\mathbf{h}\colon W \subset \mathbb{R}^d \to M \cap U$ é outra parametrização para $M \cap U$, *compatível* com μ. Então $\int_W \mathbf{h}^*\omega$ existe *sse* $\int_V \mathbf{g}^*\omega$ existe e, nesse caso, temos
$$\int_W \mathbf{h}^*\omega = \int_V \mathbf{g}^*\omega.$$
Portanto, a definição de $\int_{M \cap U} \omega$ não depende da parametrização escolhida.

4. *Elemento de volume:* Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-d. Diz-se que $dV_d \in \Omega^d(\mathbb{R}^n)$ é um *elemento de volume* para M se

$$|dV_d(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d)| = \sqrt{\det G}, \quad \forall \mathbf{x} \in M, \forall \mathbf{v}_1 \dots, \mathbf{v}_d \in T_{\mathbf{x}}M,$$

onde $G = (G_{ij})$ é a matrix-$(d \times d)$ definida por $G_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$.

5. *Fórmula local para o elemento de volume:* Seja $dV_d \in \Omega^d(\mathbb{R}^n)$ um elemento de volume para $M \subset \mathbb{R}^n$ e seja $\mathbf{g} \colon V \subset \mathbb{R}^d \to M \cap U$ uma parametrização para $M \cap U$, *compatível com a orientação induzida por dV_d*, então

$$\mathbf{g}^* dV_d = \sqrt{\det G}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^d,$$

onde $G_{ij} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j}$.

6. *Volume-d de uma variedade-d:* Nas condições do ponto anterior, define-se o volume d-dimensional de $M \cap U$ por

$$\mathrm{Vol}_d(M \cap U) = \int_{M \cap U} dV_d = \int_V \sqrt{\det G}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^d.$$

7. *Integrais de funções em variedades:* Nas condições dos pontos anteriores, define-se o integral de $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em $M \cap U$ por

$$\int_{M \cap U} f dV_d = \int_V f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \sqrt{\det G}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^d,$$

se o integral existir.

8. *Integrais em Curvas:* Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-1 parametrizada por $\mathbf{g} \colon]a, b[\to M$ e $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, então

$$\int_M f dV_1 = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \|\mathbf{g}'(t)\|\, dt.$$

Em particular, o *comprimento* de M é $\mathrm{Vol}_1(M) = \int_a^b \|\mathbf{g}'(t)\|\, dt$.

9. *Integrais em Superfícies:* Se $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade-2 parametrizada por $\mathbf{g} \colon V \subset \mathbb{R}^2 \to M$ e $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, então

$$\int_M f dV_2 = \int_V f(\mathbf{g}(t)) \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2} \right\| dt^1 dt^2.$$

Em particular, a *área* de M é $\mathrm{Vol}_2(M) = \int_V \|\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2}\| dt^1 dt^2$.

10. *Formas associadas a campos:* Dado um campo vectorial $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é possível associar-lhe uma forma-1,

$$\omega_{\mathbf{F}} = F^1 dx^1 + \cdots + F^n dx^n,$$

e uma forma-$(n-1)$,

$$\Omega_{\mathbf{F}} = F^1 dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n - F^2 dx^1 \wedge dx^3 \cdots \wedge dx^n + \cdots + (-1)^{n-1} F^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}.$$

11. *Interpretação geométrica dos integrais de formas:*

(i) Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-1 orientável e $\mathbf{F}$ é um campo vectorial, então $\int_M \omega_{\mathbf{F}}$ é o trabalho de $\mathbf{F}$ ao longo de M:

$$\int_M \omega_{\mathbf{F}} = \int_M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \langle \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)), \mathbf{g}'(t) \rangle \, dt,$$

onde $\mathbf{g}\colon [a,b] \to M$ é uma parametrização para M compatível com a orientação.

(ii) Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-$(n-1)$ orientável e $\mathbf{F}$ é um campo vectorial, então $\int_M \Omega_{\mathbf{F}}$ é o *fluxo* de $\mathbf{F}$ através de M, na direcção da normal unitária, $\mathbf{n}$, correspondente à orientação:

$$\int_M \Omega_{\mathbf{F}} = \int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_{n-1}.$$

No caso $n = 3$, o fluxo é dado por

$$\int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \int_V \left\langle \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{t})), \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2} \right\rangle dt^1 dt^2,$$

onde $\mathbf{g}\colon V \subset \mathbb{R}^2 \to M$ é uma parametrização para M compatível com a orientação (ou seja, tal que $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2}$ tem o sentido da normal $\mathbf{n}$).

12. *Variedades com bordo:* Diz-se que $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma *variedade com bordo* de dimensão d (e classe C^q) se $M = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$, onde $\overset{\circ}{M}$ é uma variedade-d (e classe C^q), ∂M é uma variedade-$(d-1)$ (e classe C^q) tal que $\forall \mathbf{x} \in \partial M$ existe um aberto $U \ni \mathbf{x}$ e uma aplicação $\mathbf{g}\colon V \cap \{t^1 \leq 0\} \subset \mathbb{R}^d \to M$ que satisfaz:

    (a) $\mathbf{g}(V \cap \{t^1 < 0\}) = \overset{\circ}{M} \cap U$ e $\mathbf{g}(V \cap \{t^1 = 0\}) = \partial M \cap U$

    (b) $\mathbf{g}$ é bijectiva, de classe C^q, $\mathbf{g}^{-1}$ é contínua e a característica de $D\mathbf{g}$ é máxima;

    Diz-se que M é *orientável* se $\overset{\circ}{M}$ é orientável e define-se

    $$\int_M \omega = \int_{\overset{\circ}{M}} \omega, \qquad \forall \omega \in \Omega^d(\mathbb{R}^n).$$

    Se $\mu \in \Omega^d(\mathbb{R}^n)$ induz uma orientação em $\overset{\circ}{M}$, então a forma $\nu \in \Omega^{d-1}(\mathbb{R}^n)$ definida por

    $$\nu(\mathbf{x})(\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d) = \mu(\mathbf{x})(\mathbf{n}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d), \qquad \forall \mathbf{x} \in \partial M \ \forall \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d \in T_{\mathbf{x}} \partial M,$$

    onde $\mathbf{n} \in T_{\mathbf{x}} M$ é o campo unitário, normal e exterior a ∂M, define uma orientação em ∂M dita *orientação induzida por* M.

13. *Teorema de Stokes:* Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-d com bordo, compacta e orientável. Então, $\forall \omega \in \Omega^{d-1}(\mathbb{R}^n)$,

    $$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}$$

    onde ∂M tem a orientação induzida por M.

14. *Corolário:* Se $\omega \in \Omega^d(\mathbb{R}^n)$ é exacta e $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-d compacta tal que $\partial M = \varnothing$, então

    $$\int_M \omega = 0.$$

15. *Casos particulares do Teorema de Stokes:* No caso em que M é uma
    (i) *variedade-*1, o Teorema de Stokes é o *Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha*: se f é um campo escalar, então

$$\boxed{\int_M \nabla f \cdot d\mathbf{g} = f(\mathbf{B}) - f(\mathbf{A})}$$

    onde $\mathbf{g} : [a, b] \to M$ é uma parametrização tal que $\mathbf{A} = \mathbf{g}(a)$ e $\mathbf{B} = \mathbf{g}(b)$;
    (ii) *variedade-*n *em* $\mathbb{R}^n$, o Teorema de Stokes é o *Teorema da Divergência*: se $\mathbf{F}$ é um campo vectorial de classe C^1, então

$$\boxed{\int_M (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV_n = \int_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_{n-1}}$$

    onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a ∂M;
    (iii) *variedade-*2 *em* $\mathbb{R}^2$, o Teorema de Stokes é o *Teorema de Green*: se P e Q são funções de classe C^1, então

$$\boxed{\int_{\partial M} P dx + Q dy = \int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dV_2}$$

    onde ∂M é percorrido no sentido em que M fica *à esquerda*;
    (iv) *variedade-*2 *em* $\mathbb{R}^3$, orientável, o Teorema de Stokes é o *Teorema de Stokes para Campos Vectoriais*: se $\mathbf{F}$ é um campo vectorial de classe C^1 e $\mathbf{n}$ é uma normal a M, unitária, então

$$\boxed{\int_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}}$$

    onde $\mathbf{g}$ percorre ∂M no sentido dado pela regra da mão direita aplicada à normal $\mathbf{n}$.

16. (a) *Significado da Divergência:* Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, e seja $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Temos,

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{p}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\mathrm{Vol}_n(B_\epsilon(\mathbf{p}))} \int_{\partial B_\epsilon(\mathbf{p})} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_{n-1},$$

    onde $B_\epsilon(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \le \epsilon\}$ e $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a $B_\epsilon(\mathbf{p})$. Portanto, $(\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{p})$ mede o fluxo por unidade de volume próximo de $\mathbf{p}$.
    (b) *Significado do Rotacional:* Sejam $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de classe C^1 e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Dado $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|\mathbf{n}\| = 1$, seja $P \subset \mathbb{R}^3$ o plano ortogonal a $\mathbf{n}$ e seja $D_\epsilon \subset P$ o disco de raio ϵ em P em $\mathbf{p}$: $D_\epsilon = P \cap B_\epsilon(\mathbf{p})$. Então, temos

$$(\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(D_\epsilon)} \int_{\partial D_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g},$$

    onde g percorre ∂D_ϵ no sentido dado pela regra da mão direita aplicada ao vector $\mathbf{n}$. Portanto, $(\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}$ mede a circulação de $\mathbf{F}$, por unidade de área, em torno de $\mathbf{p}$.

17. *Caminhos Homotópicos:* Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que dois caminhos fechados $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \colon [a,b] \to D$ são *homotópicos* em D se existe $\mathbf{H} \colon [a,b] \times [0,1] \to D$, contínua, tal que
    (i) $\mathbf{H}(s,0) = \boldsymbol{\alpha}(s)$ e $\mathbf{H}(s,1) = \boldsymbol{\beta}(s)$, $\forall s \in [a,b]$;
    (ii) $\mathbf{H}(a,t) = \mathbf{H}(b,t)$, $\forall s \in [0,1]$.

    Neste contexto, diz-se que $\mathbf{H}$ é uma *homotopia* entre $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$. Se $\mathbf{H}$ é de classe C^k, diz-se que $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são C^k-homotópicos em D.
18. *Invariância por Homotopia:* Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\omega \in \Omega^1(D)$ tal que $d\omega = 0$. Se $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ são dois caminhos fechados C^1-*homotópicos* em D, então
$$\int_{[a,b]} \boldsymbol{\alpha}^* \omega = \int_{[a,b]} \boldsymbol{\beta}^* \omega.$$
19. *Condição necessária e suficiente para uma forma-1 ser exacta:* Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, conexo por arcos, e seja $\omega \in \Omega^1(D)$. Então ω é exacta *sse* para o caminho fechado $\boldsymbol{\alpha} \colon [a,b] \to D$, de classe C^1, temos
$$\int_{[a,b]} \boldsymbol{\alpha}^* \omega = 0.$$
20. Diz-se que um conjunto conexo por arcos $D \subset \mathbb{R}^n$ é *simplesmente conexo* se todo o caminho fechado $\boldsymbol{\alpha} \colon [a,b] \to D$ é homotópico em D a um caminho constante.
21. *Corolário:* Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, simplesmente conexo. Se $\omega \in \Omega^1(D)$ é uma forma *fechada* , então ω é *exacta* em D.

VIII. Integral de Lebesgue

1. Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ diz uma *álgebra* se
   (i) $\varnothing \in \mathcal{A}$
   (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$
   (iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

   Uma álgebra $\mathcal{A}$ diz-se uma *σ-álgebra* se

   (iv) $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.
2. A *medida exterior* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é

$$\overline{\mathrm{V}}_n(A) \overset{\text{def}}{=} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{V}_n(I_k) \mid I_k \text{ é um intervalo, } \forall k, \text{ e } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\} \in [0, +\infty].$$

   Nota: $\overline{\mathrm{V}}_n(A) = 0$ *sse* A tem medida nula.
3. A diferença simétrica de dois conjuntos A e B é

$$A \triangle B \overset{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

4. Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^n$ é *mensurável (à Lebesgue) com medida finita* se $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ intervalos limitados $I_1, \ldots, I_N$ tais que

$$\overline{\mathrm{V}}_n\left(A \triangle \bigcup_{k=1}^{N} I_k \right) < \epsilon,$$

   e define-se a *medida* de A como $\mathrm{V}_n(A) = \overline{\mathrm{V}}_n(A)$.
   Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^n$ é *mensurável (à Lebesgue)* se

$$\forall L > 0 \qquad A \cap [-L, L]^n \text{ é mensurável com medida finita},$$

   e define-se a *medida* de A como $\mathrm{V}_n(A) \overset{\text{def}}{=} \overline{\mathrm{V}}_n(A)$. A família dos subconjuntos mensuráveis (à Lebesgue) denota-se por $\mathcal{M}$.
5. *Proposição:*
   (i) $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra;
   (ii) $\mathrm{V}_n \colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ é σ-aditiva, ou seja, se $A_1, \ldots, A_k, \ldots \in \mathcal{M}$ são disjuntos dois a dois, então

$$\mathrm{V}_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{V}_n(A_k);$$

   (iii) $\mathrm{V}_n(\varnothing) = 0$;
   (iv) V_n é *monótona*, ou seja, $\mathrm{V}_n(A) \subset \mathrm{V}_n(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{M} \colon A \subset B$;
   (v) $A \in \mathcal{M}$, $\forall A$ aberto (logo $A \in \mathcal{M}$, $\forall A$ fechado).

   Observação: Há exemplos (não triviais) de conjuntos que *não são mensuráveis*.

6. *Corolário:* Sejam $A_1 \subset A_2 \subset \cdots A_k \cdots \in \mathcal{M}$ e seja $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, então

$$\mathrm{V}_n(A) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{V}_n(A_k).$$

7. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *mensurável* se $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}$ para qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$. (*Nota: basta considerar intervalos da forma* $]-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$.)
8. (i) f contínua $\Rightarrow$ f mensurável;
   (ii) f, g mensuráveis e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua $\Rightarrow$ $F \circ (f, g)$ mensurável (e.g., $f + g, fg$);
   (iii) $f_1, f_2, \ldots$ mensuráveis tais que existe $f(\mathbf{x}) = \lim_{k\to+\infty} f_k(\mathbf{x}) \Rightarrow f$ mensurável.
9. A função $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *simples* se existem conjuntos disjuntos $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ e números reais $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i}.$$

   A função s é mensurável *sse* $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{M}$.
10. Se $s : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ é simples e mensurável,

$$s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i} \qquad (c_i \in \mathbb{R}^+, A_i \in \mathcal{M}),$$

   define-se o seu *integral* como sendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} s dV_n = \sum_{i=1}^{N} c_i V(A_i) \in [0, +\infty]$$

11. Se $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ é mensurável, define-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dV_n = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s dV_n : 0 \le s \le f \text{ é simples e mensurável} \right\} \in [0, +\infty]$$

   Se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dV_n < +\infty$$

   a função f diz-se *integrável*.
12. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função, define-se

$$f^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \ge 0 \\ 0 & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \le 0 \end{cases}, \qquad f^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \ge 0 \\ -f(\mathbf{x}) & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \le 0 \end{cases}$$

   (note-se que $f^+, f^- \ge 0, f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$ e que f é mensurável *sse* f^+, f^- são mensuráveis).
13. Uma função mensurável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *integrável* se f^+, f^- são integráveis. Nesse caso, define-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dV_n = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dV_n - \int_{\mathbb{R}^n} f^- dV_n.$$

14. Se $A \in \mathcal{M}$, f diz-se *integrável em* A se $f\chi_A$ é integrável, caso em que se define
$$\int_A f dV_n = \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_A dV_n.$$
O conjunto das funções integráveis em A designa-se por $L^1(A)$.

15. Seja $A \in \mathcal{M}$. Então
(i) Se $f : A \to \mathbb{R}$ é mensurável e limitada e $V_n(A) < +\infty$ então $f \in L^1(A)$;
(ii) Se $f, g \in L^1(A)$ e $f \leq g$ então
$$\int_A f dV_n \leq \int_A g dV_n.$$
(iii) Se $V_n(A) = 0$ então $\int_A f dV_n = 0$.
(iv) Se $a, b \in \mathbb{R}$ e f, g $L^1(A)$ então $af + bg \in L^1(A)$ e
$$\int_A (af + bg) dV_n = a \int_A f dV_n + b \int_A g dV_n.$$
(v) $f \in L^1(A)$ *sse* $|f| \in L^1(A)$, e
$$\left| \int_A f dV_n \right| \leq \int_A |f| dV_n.$$

16. Seja I um intervalo compacto. Se $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann então $f \in L^1(I)$ e
$$\int_I f dV_n$$
é igual para ambas as definições.

17. *σ-aditividade do integral:* Sejam $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ com $A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \neq j$, $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ e $f \geq 0$ mensurável. Então
$$\int_A f dV_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} f dV_n.$$

18. Sejam $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ com $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ e $f \geq 0$ mensurável. Então
$$\int_A f dV_n = \lim_{k \to +\infty} \int_{A_k} f dV_n.$$

19. $\dfrac{1}{x^\alpha} \in L^1([1, +\infty[)$ *sse* $\alpha > 1$.

20. $e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

21. $\dfrac{1}{x^\alpha} \in L^1(]0, 1])$ *sse* $\alpha < 1$.

22. *Teorema da Convergência Monótona de Levi:* Seja $A \in \mathcal{M}$ e seja $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A tais que

$$0 \le f_1 \le f_2 \le \dots \qquad \textit{q.t.p} \text{ em } A.$$

Seja $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $f = \lim_{k\to+\infty} f_k$ *q.t.p* em A, então

$$\int_A f dV_n = \lim_{k\to+\infty} \int_A f_k dV_n \in [0, +\infty].$$

23. *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:* Seja $A \in \mathcal{M}$ e seja $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A. Se existe $f : A \to \mathbb{R}$ tal que

$$f = \lim_{k\to+\infty} f_k, \qquad \textit{q.t.p. em } A,$$

e se existe $g \in L^1(A)$ tal que

$$|f_k| \le g, \qquad \textit{q.t.p. em } A,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, então $f \in L^1(A)$ e

$$\int_A f dV_n = \lim_{k\to+\infty} \int_A f_k dV_n.$$

24. *Regra de Leibniz:* Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e $f : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}, y)$ é integrável em $\mathbf{x}$ para todo o $y \in \mathbb{R}$ e diferenciável em y para todo o $\mathbf{x} \in A$. Se existe $g \in L^1(A)$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y)\right| \le g(\mathbf{x})$$

para $\mathbf{x} \in A$ e y numa vizinhança de $y_0 \in \mathbb{R}$ então a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(y) = \int_A f(\mathbf{x}, y) dV_n(\mathbf{x})$$

é diferenciável em y_0 e

$$F'(y_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y_0) dV_n(\mathbf{x}).$$