**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Análise Matemática III

## 2º Semestre 1999/2000

2º Teste e 1º Exame - Todos os cursos

26 de Junho de 2000

**2º Teste - Grupos 4,5,6 e 7 - 90 minutos.**
**1º Exame - Todos os Grupos - 3 horas.**
**Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.**

1. Considere a região $A \subset \mathbb{R}^2$ descrita por (2)

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x^3| \leq y \leq |x|, -1/2 \leq x \leq 1\}.$$

Escreva uma expressão para a sua área em termos de um integral múltiplo da forma $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} dy)dx$.

2. Considere o sólido $V$ descrito por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2},\ x,y \geq 0\}.$$

a) Escreva uma expressão para o seu volume em termos de um integral múltiplo da forma $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} dx)dy)dz$. (2)

b) Escreva uma expressão para o seu volume em termos de um integral múltiplo em coordenadas cilíndricas. (2)

c) Calcule o volume de $V$ utilizando coordenadas esféricas. (2)

3. Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ a região definida por (2)

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq \pi - x,\ x/2 \geq y \geq x/2 - \pi/4\}.$$

Calcule $\int\int_S \operatorname{sen}(x+y)\cos(x-2y)dxdy$, usando uma mudança de coordenadas apropriada.

4. Considere a variedade

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}},\ 0 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

a) Determine o espaço tangente a $M$ no ponto $(1, 1, \sqrt{8})$. (1)

b) Escreva uma expressão para a área de $M$. Não necessita de calcular o integral mas tem de o apresentar explicitamente como integral múltiplo. (2)

c) Considere o campo vectorial $f(x, y, z) = (-zy + (z^2 - 64), zx, x^3y^3)$. Calcule o fluxo de $\mathrm{rot} f$ através de $M$ no sentido da normal que tem componente segundo $z$ negativa. (2)

d) Será que $f$ é um gradiante em $\mathbb{R}^3$ ? Justifique. (1)

5. Considere a pirâmide $P \subset \mathbb{R}^3$ limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$. Considere o campo vectorial $h(x, y, z) = (3, (z^3 + x^2)y, -x^2z - \frac{1}{4}z^4)$. (2)

Calcule o fluxo de $h$ através da face de $P$ que está contida no plano $x + y + z = 1$, no sentido da normal exterior.

6. Determine o ponto da circunferência de raio 1 centrada na origem em $\mathbb{R}^2$ em que a função $f(x, y) = x - y$ tem o valor máximo. Justifique. (1)

7. Determine se a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}$ é integrável em $]0, +\infty[$. Em caso afirmativo calcule o seu integral. Justifique. (1)