Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Semestre 2000/2001

2º Exame - Todos os cursos excepto LEFT, LMAC

1 de Fevereiro de 2001

Duração: 3 horas.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere o sólido $V \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2} - 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2+y^2 \leq 4\}.$$

(2 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de um integral múltiplo da forma $\int_{\dots}^{\dots}(\int_{\dots}^{\dots}(\int_{\dots}^{\dots} dy)dx)dz$.

(2 val.) b) Seja $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$. Calcule $\int_V f$.

(2 val.) **2.** Considere a região $S \subset \mathbb{R}^2$ definida por

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, 0 < x - y < 1,\, 1 < xy < 2\}.$$

Calcule o integral

$$\int\int_S (x^2 - y^2)e^{(x-y)^2} dxdy.$$

Justifique cuidadosamente a resposta.

(2 val.) **3.** Considere o campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}).$$

Calcule o trabalho de f ao longo da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{81} = 1$.

(2.5 val.) **4.** Considere a variedade

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y + x^2,\, 0 < x < 1,\, 0 < y < 1\}.$$

Calcule a massa de M, sabendo que a sua densidade de massa é dada por $\alpha(x,y,z) = x$.

Volte S. F. F.

(2 val.) **5.** Calcule o fluxo do campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (\cos(z^2), x^3 + y, 1)$ através do cilindro

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < z < 1,\, x^2 + y^2 = 1\},$$

segundo uma normal escolhida por si.

(2 val.) **6.** Usando o <u>teorema de Stokes</u>, calcule o trabalho do campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (z,x,y)$, ao longo da circunferência

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1,\, x^2 + y^2 = 1\},$$

segundo um sentido escolhido por si.

(2.5 val.) **7.** Determine os pontos da curva $C \subset \mathbb{R}^2$ definida pela equação $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$ que se encontram mais próximos da origem.

8. Uma partícula desloca-se ao longo da recta real, sendo a sua posição no instante de tempo t dada por

$$x(t) = \int_1^2 \frac{te^{-tx^2}}{x}dx.$$

(1.5 val.) a) Calcule a velocidade da partícula no instante $t = 0$. Justifique.

(1.5 val.) b) Determine a posição final da partícula, *i.e.* calcule $\lim_{t\to+\infty} x(t)$. Justifique.