Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Teste - 11 de Novembro de 2000 - 11h00
Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z^2 + (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 \geq 4,\ x,y,z \geq 0\}.$$

(3) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

(3) b) Calcule a massa de um sólido com a forma de V e densidade de massa igual a z.

(3) 2. Considere a região $U \subset R^2$ definida por

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x+y < 1,\ 2y+1 < x < 2y+2\}.$$

Calcule o integral duplo

$$\int_U \cos(x+y) e^{2y-x} dxdy,$$

utilizando uma mudança de coordenadas apropriada. Justifique detalhadamente a resposta.

3. Considere o campo vectorial $f(x,y) = (\frac{2x}{x^2+y^2-4}, \frac{2y}{x^2+y^2-4})$ definido em $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 4\}$.

(2) a) Verifique se f é ou não um campo fechado em S.

(3) b) Será f um gradiante no conjunto $x^2+y^2 > 4$? Justifique.

(2.5) c) Calcule o trabalho de f ao longo do segmento de recta que une o ponto $(0,4)$ ao ponto $(4,0)$.

(3.5) 4. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $R \subset U$ uma região limitada por uma curva regular simples $C \subset U$, e

$$G : U \to \mathbb{R}^2$$

uma aplicação de classe C^2, injectiva, tal que $\det DG > 0$. Use o teorema de Green para demonstrar o seguinte caso particular da fórmula de mudança de coordenadas

$$\int\int_{G(R)} dxdy = \int\int_R \det DG\, dudv.$$

Justifique cuidadosamente a resposta.

<u>*Sugestão:*</u> Seja $G(u,v) = (f(u,v), g(u,v))$. Comece por mostrar que o trabalho do campo vectorial $a(x,y) = (y,0)$ ao longo de $G(C)$ é igual ao trabalho do campo vectorial $b(u,v) = (g\,\frac{\partial f}{\partial u}, g\,\frac{\partial f}{\partial v})$ ao longo de C.