Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Teste - 6 de Maio de 2000 - 13h00

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 2(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2 \, , z \geq 1-\sqrt{(x^2+y^2)} \, , z \leq 2-2(x^2+y^2) \, , x,y \geq 0\}.$$

(2) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

(2) b) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx$.

(3) c) Calcule o volume de V utilizando coordenadas cilíndricas.

2. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = (\exp(x+y), \exp(x-y))$.

(2.5) a) Mostre que g define uma transformação de coordenadas em

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \log(\pi/2) \leq (x+y) \leq \log(\pi) \, , \log(\pi/2) \leq (x-y) \leq \log(\pi)\}.$$

(2.5) b) Utilize a transformação g para calcular o integral

$$\int \int_S e^{2x} \mathrm{sen}(e^{x+y}) \cos(e^{x-y}) dxdy.$$

3. Considere o caminho em $\mathbb{R}^3$ definido por $g(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), t)$, onde $t \in [0, 6\pi]$. Seja C a curva representada por g.

(1.5) a) Calcule o comprimento do caminho g.

(1.5) b) Calcule a massa de C, sabendo que a densidade de massa por unidade de comprimento é dada por $\rho(x,y,z) = z^2$.

(2) c) Calcule o trabalho da força $f(x,y,z) = (x,y,z)$ ao longo de C, percorrida no sentido descendente dos z.

(3) 4. Determine, justificando, quais das seguintes funções são integráveis no seu domínio:

a) $f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$.

b) $g : [0, 1[\to \mathbb{R}$, onde $g(x) = \frac{1}{1-x}$.