Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Teste - 6 de Maio de 2000 - 15h00

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\,;\, z \geq 0\,;\, z \leq \frac{1}{2} + \frac{(x^2+y^2)}{2}\,;\, z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2}\,\}$$

(2) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

(2) b) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz \right) dx \right) dy$.

(3) c) Calcule a coordenada x do centro de massa de V, supondo que a densidade é constante igual a um e usando coordenadas cilíndricas.

2. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x,y) = (y, y - x^3)$$

e o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < y < 2\,;\; x^3 < y < 1 + x^3\,\}$$

(2.5) a) Mostre que g define uma transformação de coordenadas em S.

(2.5) b) Use a transformação g para calcular o integral

$$\int \int_S \frac{x^2}{1 + (y - x^3)^2} dxdy$$

3. Considere o caminho em $\mathbb{R}^3$ definido por $g(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t, t)$ onde $t \in [0, 4\pi]$.

(1.5) a) Calcule a massa do fio de um material com densidade dada por $\alpha(x,y,z) = z$ e cuja configuração é dada pelo caminho g.

(1.5) b) Calcule o momento de inércia do fio da alínea anterior relativamente ao eixo z.

(2) c) Calcule o trabalho realizado pela força $F(x,y,z) = (-y, x, 0)$ ao longo do caminho g.

(3) 4. Determine, justificadamente, qual das funções seguintes é integrável no respectivo domínio:

a) $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

b) $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = e^{-x}$.