

## Análise Matemática III

2001/2002

1º Exame e 2º Teste

11 de Janeiro de 2002 – 17 horas

1º exame: todos os grupos. Duração: 3h  
2º teste: grupos 4, 5 e 6. Duração: 1h30m

**Apresente todos os cálculos**

(1.5 val.) 1. Considere a região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x, x < 1\}$$

e a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = xy$ . Determine  $\iint_D f$ .

2. Considere a região  $V \subset \mathbb{R}^3$  definida por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de  $V$  em termos de integrais iterados da forma  $\int(\int(\int dx)dy)dz$ .

(2 val.) (b) Seja  $f(x, y, z) = xy^2$ . Calcule  $\iiint_V f$ .

3. Considere o campo vectorial

$$f(x, y, z) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} + x, \frac{x}{x^2 + y^2} + y, z^2 \right),$$

definido em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$ .

(1.5 val.) (a) Determine se  $f$  é ou não um campo fechado.

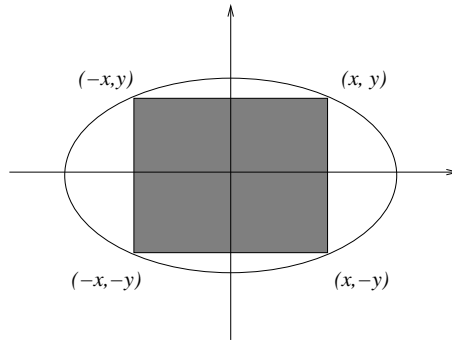
(1.5 val.) (b) Determine se  $f$  é ou não um gradiente no seu domínio. Justifique.

(1.5 val.) (c) Calcule o trabalho de  $f$  ao longo do arco de circunferência vertical definido pelas condições  $x = 0$ ,  $y^2 + z^2 = 4$ ,  $-1 < z < 1$ ,  $y > 0$ , num sentido à sua escolha.

**Volte S. F. F.**

## INÍCIO DO 2º TESTE

- (1.5 val.) 4. Um rectângulo está inscrito na elipse de equação  $x^2 + 4y^2 = 1$  como mostra a figura. Escreva a área do rectângulo como função de  $(x, y)$ . Determine a área do maior rectângulo nestas condições.



5. Considere o campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, y, 2x - z)$  e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 4 - x^2 - z^2, 0 < y < 3\}.$$

- (1.5 val.) (a) Determine o espaço normal a  $S$  no ponto  $(1, 2, 1)$ .
- (b) Calcule o fluxo de  $\mathbf{F}$  através de  $S$ , no sentido da normal unitária exterior ao sólido limitado por  $S$  e pelos planos  $y = 0$  e  $y = 3$ ,
- (2 val.) (i) usando o teorema da divergência;
- (2 val.) (ii) pela definição de fluxo;
- (1.5 val.) (iii) usando o teorema de Stokes.

- (1.5 val.) 6. Seja

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| < 1, x^2 + \frac{y^2}{4} > 1 \right\},$$

e  $f$  a função em  $D$  dada por

$$f(x, y, z) = \frac{\text{sen} \left( x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 \right)}{\left( x^2 + \frac{y^2}{4} \right)^2}.$$

Mostre que  $f$  é integrável. Encontre um majorante para  $|\iiint_D f|$ . Justifique.