Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Exame de Época Especial - 16 de Setembro de 1999

Duração - 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $V \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\ x+z \leq 2,\ z-x \leq 2,\ y+z \leq 2,\ z-y \leq 2\}.$$

(3) a) Calcule o volume de V utilizando um integral triplo.

(2) b) Calcule a coordenada z do centro de massa de um corpo com a forma de V e densidade constante $\rho(x,y,z) = 3$.

2. (1) a) Calcule justificadamente

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{+\infty} k \exp(-kx)\, dx.$$

(1) b) Decida se o integral $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}}\, dx$ existe. Justifique.

(3) c) Considere o conjunto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$. Calcule

$$\int_A \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^4}\, dx\, dy\, dz.$$

3. Considere a superfície S em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1 + x^2 + y^2,\ z < 0\}.$$

(2) a) Determine o espaço tangente e o espaço normal a S no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

(2) b) Calcule a área de S.

4. Considere o caminho fechado $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 7,\ z = 3\}$.

(2.5) a) Escolha um sentido para percorrer C e utilizando o teorema de Stokes calcule o trabalho do campo vectorial $f(x,y,z) = (\frac{x}{z-4}, \frac{y}{z-4}, 0)$ ao longo de C segundo esse sentido.

(1) b) Será o campo vectorial f da alínea anterior um gradiante no seu domínio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4\}$? Justifique.

5. Considere a superfície M definida pelas condições

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 16,\ z < 3\}.$$

(2.5) Escolha e fixe uma normal unitária a M. Calcule o fluxo do campo vectorial $h(x,y,z) = (x + \operatorname{arctg}(y^2), y + \operatorname{arctg}(z^2), z-3)$ através de M no sentido dessa normal.