Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

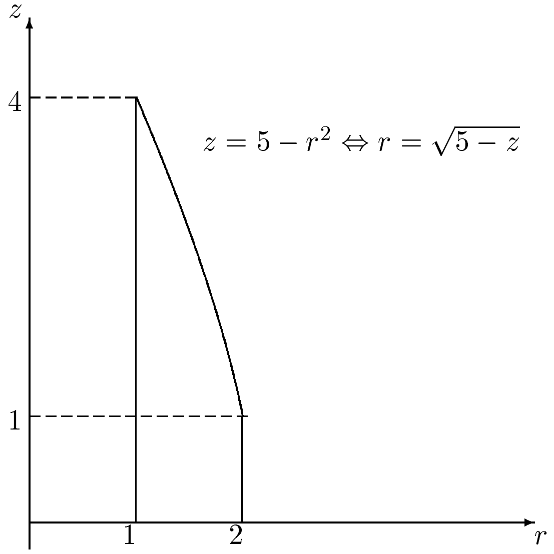
Análise Matemática III

Resolução do 2º Teste e 1º Exame - 20 de Janeiro 2000 - 13 horas

1. O sólido tem simetria cilíndrica em torno do eixo Oz. A expressão de V em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) é:

$$1 < r < 2;\ 0 < z < 5 - r^2;\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

portanto S é o sólido que se obtem rodando a seguinte figura em torno do eixo Oz sobre o primeiro quadrante do plano xOy



a) Assim, para cada valor fixo de z entre 1 e 4, (x, y) variam numa região entre dois quartos de circunferência. A circunferência interior tem sempre raio 1. Quando z está entre 0 e 1 a de fora tem raio 2, quando z está entre 1 e 4, a circunferência de fora tem raio $r = \sqrt{5 - z}$. Portanto uma expressão para o volume de V da forma pretendida é

$$\begin{aligned}\int_V 1 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx dy \right) dz \\ &+ \int_1^4 \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{5-z-y^2}} dx dy + \int_1^{\sqrt{5-z}} \int_0^{\sqrt{5-z-y^2}} dx dy \right) dz\end{aligned}$$

b) Para calcular as coordenadas do centróide, o mais fácil é usar coordenadas cilíndricas (ver acima para a expressão do sólido em coordenadas cilíndricas)

$$
\begin{aligned}
\int_V 1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \int_0^{5-r^2} r \, dz dr d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \int_1^2 5r - r^3 \, dr \\
&= \frac{15\pi}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_V x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \int_0^{5-r^2} r^2 \cos\theta \, dz dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_1^2 5r^2 - r^4 \, dr \\
&= \frac{72}{15}
\end{aligned}
$$

Por simetria temos

$$
\overline{x} = \overline{y} = \frac{\frac{72}{15}}{\frac{15\pi}{8}} = \frac{576}{225\pi}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_V z &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \int_0^{5-r^2} zr \, dz dr d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \int_1^2 \frac{1}{2} r (5 - r^2)^2 \, dr \\
&= -\frac{\pi}{24} \left. (5 - r^2)^3 \right|_1^2 \\
&= \frac{63\pi}{24}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\overline{z} = \frac{\frac{63\pi}{24}}{\frac{15\pi}{8}} = \frac{63}{45}
$$

2. A expressão da região de integração sugere a mudança de variáveis

$$
\begin{cases} u = x + y \\ v = y - e^x \end{cases}
$$

De facto nestas coordenadas a região S escreve-se

$$
\begin{aligned}
-y < x < 3 - y \Leftrightarrow 0 < x + y < 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < u < 3 \\
e^x + 1 < y < e^x + 2 \Leftrightarrow 1 < y - e^x < 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 < v < 2
\end{aligned}
$$

Precisamos no entanto de provar que $(u, v) = g(x, y) = (x + y, y - e^x)$ é uma transformação de coordenadas. Claramente g é C^1 em $\mathbb{R}^2$, e

$$
\det Dg = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -e^x & 1 \end{vmatrix} = 1 + e^x
$$

nunca se anula. Resta ver que g é injectiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x + y \\ v = y - e^x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = u - x \\ x + e^x = u - v \end{array} \right.$$

Apesar de não conseguirmos resolver explícitamente a última equação, como a função $h(x) = x + e^x$ tem derivada estritamente positiva, tem uma inversa de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e o sistema anterior tem como solução única

$$\left\{ \begin{array}{l} y = u - h^{-1}(u - v) \\ x = h^{-1}(u - v) \end{array} \right.$$

Assim g é injectiva e portanto é uma transformação de coordenadas.

Podemos agora aplicar o teorema da mudança de variáveis:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -e^x & 1 \end{array} \right|} = \frac{1}{1 + e^x}$$

logo

$$\begin{aligned} \int_S \frac{e^x + 1}{\sqrt{y - e^x}} dx dy &= \int_0^3 \int_1^2 \frac{e^x + 1}{\sqrt{v}} \frac{1}{1 + e^x} dv du \\ &= 3 \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{v}} dv \\ &= 6(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

3. a) Temos

$$\alpha'(t) = (-e^{-t} \cos t - e^{-t} \mathrm{sen} t, -e^{-t} \mathrm{sen} t + e^{-t} \cos t)$$

O comprimento de α é dado pelo integral

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} ||\alpha'(t)|| dt &= \int_0^{4\pi} \sqrt{2e^{-2t}} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{4\pi} e^{-t} dt \\ &= \sqrt{2}(1 - e^{-4\pi}) \end{aligned}$$

b) Substituindo o caminho α na expressão de F obtemos uma expressão muito complicada. Por isso em vez de tentarmos calcular o integral directamente vamos tentar aplicar o teorema fundamental do cálculo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{1 + x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

portanto o campo F é fechado. Como está definido e é C^1 em $\mathbb{R}^2$ que é um conjunto em estrela, concluímos que F é um gradiante[1]. Um potencial V para F obtém-se resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{x}{1+x^2+y^2} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{1+x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow V(x,y) = \frac{1}{2}\log(1+x^2+y^2) + C$$

Então pelo teorema fundamental do cálculo, temos que o trabalho realizado pela força F ao longo do caminho α é dado por

$$\begin{aligned} \int F.d\alpha &= V(\alpha(4\pi)) - V(\alpha(0)) \\ &= V(e^{-4\pi},0) - V(1,0) = \log(1+e^{-8\pi}) - \log 2 \end{aligned}$$

4. a) A superfície S é uma porção de superfície esférica. Em coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) é descrita por

$$r = \sqrt{2};\ -1 < r\cos\phi < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos\phi < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{4}$$

Portanto uma parametrização[2] é dada por

$$g(\theta,\phi) = (\sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi, \sqrt{2}\cos\phi)$$

com $0 < \theta < 2\pi$ e $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{4}$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi & \sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi & 0 \\ \sqrt{2}\cos\theta\cos\phi & \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\theta\cos\phi & -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\phi \end{vmatrix} \\ &= (-2\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\phi, -2\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}^2\phi, -2\,\mathrm{sen}\phi\cos\phi) \end{aligned}$$

Portanto o momento de inércia em relação ao eixo Oz é dado por

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S -z(x^2+y^2) \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} -\sqrt{2}\cos(\phi)2\,\mathrm{sen}^2\phi \left|\left|\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi}\right|\right| d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} -2\sqrt{2}\cos\phi\,\mathrm{sen}^2(\phi)2\,\mathrm{sen}\phi d\phi d\theta \\ &= -8\sqrt{2}\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\phi\,\mathrm{sen}^3(\phi)d\phi \\ &= -2\sqrt{2}\ sen^4\phi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= 2\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

[1]Também se podia ter concluído isto imediatamente notando que o campo é radial

[2]Na realidade isto é uma parametrização de S a menos de um conjunto de medida-2 nula.

b) Uma vez que temos a parametrização podemos determinar uma base para o espaço tangente calculando as derivadas parciais da parametrização no parâmetro correspondente ao ponto $(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2})$. No entanto dá um certo trabalho encontrar o parâmetro e por isso é melhor achar o espaço tangente a partir do espaço normal. O espaço normal no ponto em questão é gerado por $\nabla F(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2})$ com $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, isto é por

$$(1, \sqrt{6}, 1)$$

Portanto

$$T_{\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2})} S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + \sqrt{6}y + z = 0\}$$

5. Seja n a normal a S unitária com componente segundo x positiva.

a) Podemos aplicar o teorema da divergência ao volume

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 + y^2 + z^2 < x < 0\}$$

A fronteira de V é $\partial V = S \cup D$ onde D é a "tampa"

$$D = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Como a normal a S dada é a normal interior a V, e a normal a D unitária exterior a V é $(1,0,0)$, o teorema da divergência diz que

$$\int_V \operatorname{div} F = -\int_S F.n + \int_D F.(1,0,0)$$

isto é o fluxo de F através de S é dado por

$$\begin{aligned} \int_S F.n &= \int_D 1 + x^2 + xy^3 - \int_V 2x + y^3 + x - 3x \\ &= \int_D 1 - \int_V y^3 \\ &= \text{área}(D) - 0 \\ &= \pi \end{aligned}$$

onde o cálculo do integral de volume foi feito usando a simetria da região de integração e da função integranda.

b) Para calcular o fluxo de $\operatorname{rot} G$ podemos usar o teorema de Stokes. Este teorema diz que

$$\int_S \operatorname{rot} G.\nu = \oint_{\partial S} G$$

onde ∂S é percorrida no sentido dado a partir da normal ν pela regra da mão direita. O bordo de S é a circunferência

$$\partial S = \{(0,y,z) : y^2 + z^2 = 1\}$$

e a regra da mão direita aplicada à normal dada no enunciado (que é $-n$) diz que ∂S deve ser percorrida no sentido que visto do eixo positivo dos x é o dos ponteiros do relógio. Assim uma parametrização para ∂S é dada por

$$g(t) = (0, -\cos t, \mathrm{sen} t),\ 0 < t < 2\pi$$

e

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} G &= \int_0^{2\pi} (0, \mathrm{sen} t, \cos t).(0, \mathrm{sen} t, \cos t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Concluímos que o fluxo de $\mathrm{rot} G$ através de S no sentido indicado é 2π.

6. a) Uma vez que

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots$$

temos que

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ldots > \frac{1}{x}$$

Como $\frac{1}{x}$ não é integrável em $[1, +\infty[$, f também não é.

b) Como a região de integração e a função têm simetria radial, mudamos para coordenadas polares

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}}}{(x^2+y^2)^{5/4}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}}}{r^{\frac{5}{2}}} r\, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}} r^{-\frac{3}{2}} dr d\theta \end{aligned}$$

A razão porque não podemos calcular directamente o segundo integral é que a região de integração é ilimitada[3]. Assim vamos usar o teorema da convergência monótona para escrever o integral como o limite de uma sucessão de integrais que podemos calcular directamente.

Seja $f_k :]0, 2\pi[\times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ a sucessão de funções definidas por

$$f_k(r, \theta) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}} r^{-\frac{3}{2}} & \text{se } \frac{1}{k} \leq r \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

[3]Note-se que $\lim_{r \to 0} e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}} r^{-\frac{3}{2}} = 0$

Então para todo o k, f_k é integrável em $]0,2\pi[\times]0,+\infty[$ porque

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} f_k dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{k}}^{k} e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}} r^{-\frac{3}{2}} dr d\theta$$

é o integral de uma função contínua num intervalo compacto.
Como a função f é positiva, a sucessão de funções f_k é crescente (isto é, $f_k(r,\theta) \leq f_{k+1}(r,\theta)$ para todo o $(r,\theta) \in]0,2\pi[\times]0,+\infty[$).
Finalmente, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{k}}^{k} e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}} r^{-\frac{3}{2}} dr d\theta &= 4\pi \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}} dr \\
&= 4\pi \; e^{-\frac{1}{\sqrt{r}}}\Big|_{\frac{1}{k}}^{k} \\
&= 4\pi (e^{-\frac{1}{\sqrt{k}}} - e^{-\sqrt{k}})
\end{aligned}$$

Portanto a sucessão dos integrais $\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} f_k dr d\theta$ é limitada, (converge para 4π).
Como $f_k(r,\theta) \to f(r,\theta)$ para todo o $(r,\theta) \in]0,2\pi[\times]0,+\infty[$ quando k tende para ∞, o teorema da convergência monótona garante que f é integrável em $]0,2\pi[\times]0,+\infty[$ e

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} f(r,\theta) dr d\theta = 4\pi$$

Conclusão:

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}}}{(x^2+y^2)^{5/4}}\, dx dy = 4\pi$$