Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2001/2002

1º Teste

10 de Novembro de 2001 – 9 horas

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere a seguinte região contida em $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}.$$

a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

b) Seja $f(x, y, z) = x$. Calcule $\iiint_V f(x, y, z)dx\,dy\,dz$.

Solução:

a) Os cortes com z constante formam quartos de coroas circulares no plano xy, com $x, y \geq 0$, com raio exterior dado por $1 + \sqrt{z}$ e raio interior dado por $1 - \sqrt{z}$. Logo temos,

$$Vol(V) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-\sqrt{z}} \left(\int_{\sqrt{(1-\sqrt{z})^2-y^2}}^{\sqrt{(1+\sqrt{z})^2-y^2}} dx\right) dy + \left(\int_{1-\sqrt{z}}^{1+\sqrt{z}} \left(\int_0^{\sqrt{(1+\sqrt{z})^2-y^2}} dx\right) dy\right)\right) dz.$$

b) Temos em coordenadas cilíndricas que $x = \rho\cos(\theta)$. Logo,

$$\begin{aligned}\iiint_V xdxdydz &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 \left(\int_{(\rho-1)^2}^1 \rho\cos(\theta)dz\right) \rho d\rho\right) d\theta \\ &= \int_0^2 \rho^2(1 - (\rho - 1)^2)d\rho = 8/5.\end{aligned}$$

2. Um sólido na região

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{9}} \leq z \leq 4 - 3(x^2 + \frac{y^2}{9}),\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

tem densidade de massa $\sigma(x, y, z) = 2x$.

Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido.

Resolução: Nas coordenadas (ρ, θ, z) definidas pela transformação

$$g \ : \ \begin{cases} x = & \rho\ \cos(\theta) \\ y = & 3\rho\ \mathrm{sen}(\theta) \\ z = & z \end{cases}$$

a região S é dada (excepto os pontos de S no eixo Oz que formam um subconjunto de conteúdo nulo) por, $0 < \rho \leq z \leq 4 - 3\rho^2,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. A matriz Jacobiana da transformação g é

$$Dg = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho\ \mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ 3\mathrm{sen}(\theta) & 3\rho\ \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pelo que, $|\det(Dg)| = 3\rho$, e portanto

$$\begin{aligned}
M = \int_S \sigma &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_\rho^{4-3\rho^2} 2\rho\ \cos(\theta)\ 3\rho\ dz d\rho d\theta \\
&= 6 \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta \right) \int_0^1 \rho^2 \int_\rho^{4-3\rho^2} dz d\rho = \\
&= 6 \int_0^1 \rho^2 (4 - 3\rho^2 - \rho) d\rho = \\
&= 6 \left[\frac{4}{3}\rho^3 - \frac{3}{5}\rho^5 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = \\
&= \frac{29}{10}
\end{aligned}$$

3. Considere os seguintes campos vectoriais.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \Big(2xz,\, 2yz,\, x^2 + 10y^2 + z^2\Big), \qquad \mathbf{G}(x,y,z) = ((x-1)^2 + y^2)^3 \Big(x-1,\, y,\, 0\Big)$$

(a) Determine se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são fechados.

(b) Determine se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são gradientes.

(c) Seja $\boldsymbol{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ o caminho definido por $\boldsymbol{\alpha}(t) = (e^{t^2}, e^{t^2}\mathrm{sen} t, 0)$. Calcule $\int \mathbf{G} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$.

Solução:

(a) O campo $\mathbf{F}$ não é fechado pois

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = 20y \neq \frac{\partial F_2}{\partial z} = 2y.$$

O campo $\mathbf{G}$ é fechado:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1}{\partial y} &= \frac{\partial G_2}{\partial x} = 6y(x-1)\left((x-1)^2 + y^2\right)^2 \\
\frac{\partial G_1}{\partial z} &= \frac{\partial G_3}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial G_2}{\partial z} &= \frac{\partial G_3}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

(b) O campo $\mathbf{F}$ não é gradiente porque não é fechado. O campo $\mathbf{G}$ é é fechado, é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Como $\mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo, $\mathbf{G}$ é um gradiente. Em alternativa, pode mostrar-se que $\mathbf{G}$ é um gradiente calculando um potencial:

$$\begin{aligned}
\nabla\phi = \mathbf{G} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = G_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = G_2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = G_3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \frac{1}{8}\left((x-1)^2 + y^2\right)^4 + A(y,z) \\ \phi = \frac{1}{8}\left((x-1)^2 + y^2\right)^4 + B(x,z) \\ \phi = C(x,y) \end{cases} \\
\Leftrightarrow \phi = \frac{1}{8}\left((x-1)^2 + y^2)\right)^4 + K,
\end{aligned}$$

onde K é uma constante.

(c) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha, temos

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{G} \cdot d\boldsymbol{\alpha} &= \phi(g(1)) - \phi(g(0)) \\
&= \phi(e, e \cdot \mathrm{sen}(1), 0) - \phi(1,0,0) \\
&= \frac{1}{8}\left((e-1)^2 + e^2 \mathrm{sen}^2(1)\right)^4.
\end{aligned}$$

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. O *laplaciano* de f é a função $\Delta f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.$$

Seja $C_\epsilon = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \epsilon^2\right\}$ e $\mathbf{F}(x, y) = (-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x})$. Mostre que

$$\Delta f(x_0, y_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g},$$

onde $\mathbf{g}$ é um caminho regular que percorre C_ϵ uma vez no sentido anti-horário.

Sugestão: Use o teorema de Green.

Solução: Seja $D_\epsilon = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \epsilon^2\right\}$. Aplicando o teorema de Green, vem

$$\begin{aligned}
\int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} &= \iint_{D_\epsilon} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \iint_{D_\epsilon} \Delta f(x, y) dxdy.
\end{aligned}$$

Visto que f é de classe C^2, o laplaciano Δf é contínuo. Deste facto e da igualdade anterior obtemos então

$$\begin{aligned}
\left|\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} - \Delta f(x_0, y_0)\right| &= \lim_{\epsilon \to 0} \left|\frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{D_\epsilon} \Delta f(x, y) dxdy - \Delta f(x_0, y_0)\right| \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \left|\iint_{D_\epsilon} \Big(\Delta f(x, y) - \Delta f(x_0, y_0)\Big) dxdy\right| \\
&\leq \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{D_\epsilon} \max_{(x,y) \in D_\epsilon} |\Delta f(x, y) - \Delta f(x_0, y_0)|\, dxdy \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\max_{(x,y) \in D_\epsilon} |\Delta f(x, y) - \Delta f(x_0, y_0)|\, \pi\epsilon^2}{\pi\epsilon^2} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \max_{(x,y) \in D_\epsilon} |\Delta f(x, y) - \Delta f(x_0, y_0)| \\
&= 0.
\end{aligned}$$