

Análise Matemática III

Exercícios

Aplicações dos Teoremas da Divergência e Stokes

1 Demonstre a Lei de Gauss do electromagnetismo:

Como o campo eléctrico E e a densidade de carga eléctrica ρ satisfazem a primeira equação de Maxwell em \mathbb{R}^3 , $\operatorname{div} E = \rho$, então o fluxo do campo eléctrico E para fora de uma superfície regular fechada e limitada é igual à carga eléctrica total contida no volume limitado por essa superfície.

(nota: as constantes físicas foram postas igual a 1.)

2 Demonstre a Lei de Ampère da magnetoestática (todos os campos se assumem estacionários, i.e. independentes do tempo):

Como o campo magnético B e a densidade de corrente eléctrica (por unidade de volume) J satisfazem a quarta equação de Maxwell em \mathbb{R}^3 , $\operatorname{rot} B = J$, então a circulação de B ao longo de um caminho regular fechado γ que limita uma superfície regular S é igual ao fluxo da densidade de corrente eléctrica J através de S .

(nota: as constantes físicas foram postas igual a 1.)

3 Seja ϕ um campo escalar C^2 e $f = (f_1, f_2, f_3)$ um campo vectorial C^2 em \mathbb{R}^3 . Designa-se por Laplaciano de ϕ o campo escalar $\operatorname{lap} \phi = \operatorname{div}(\nabla \phi)$.

a) Mostre que

$$\operatorname{lap} \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

b) Mostre que $\operatorname{div}(\phi f) = \nabla \phi \cdot f + \phi \operatorname{div}(f)$.

c) Mostre que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$.

d) Mostre que $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} f) = \nabla(\operatorname{div} f) - (\operatorname{lap} f_1, \operatorname{lap} f_2, \operatorname{lap} f_3)$.

4 Seja V um aberto em \mathbb{R}^3 limitado por uma superfície fechada regular S com normal exterior unitária n . Sejam f, g campos escalares C^2 em \mathbb{R}^3 . Mostre que:

a) $\int_S \nabla f \cdot n = \int_V \operatorname{lap} f$.

b) $\int_S (f \nabla g \cdot n) - \int_S (g \nabla f \cdot n) = \int_V (f \operatorname{lap} g - g \operatorname{lap} f)$.

5 Um campo escalar f , de classe C^2 em \mathbb{R}^3 , diz-se harmónico se $\operatorname{lap} f = 0$. Sejam V , S e n como no exercício anterior. Sejam f e g campos escalares harmónicos. Mostre que:

a) $\int_S \nabla f \cdot n = 0$.

b) $\int_S f \nabla g \cdot n = \int_S g \nabla f \cdot n$.

$$c) \int_S f \nabla f \cdot n = \int_V \nabla f \cdot \nabla f.$$

6 Este exercício trata de um exemplo de lei de conservação. As leis de conservação são importantes na mecânica, mecânica dos fluidos, electromagnetismo, etc.

Considere em \mathbb{R}^3 a densidade de massa de um fluido (por unidade de volume) $\rho(t, x, y, z)$ onde a variável t é o tempo. Considere a densidade de corrente $J(t, x, y, z)$. Estas duas grandezas satisfazem uma equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0.$$

Mostre que a equação de continuidade anterior representa a lei de conservação da massa do fluido:

“Se S é uma superfície fechada e regular que limita uma região V , então o fluxo de J através de S para o exterior de V é igual à derivada no tempo da massa total de fluido contida em V .”

Sugestão: Pode assumir a regra de Leibnitz: se $f(t) = \int_V g(t, x, y, z) dx dy dz$ então $f'(t) = \int_V \frac{\partial g(t, x, y, z)}{\partial t} dx dy dz$. A regra de Leibnitz vai ser estudada em detalhe e justificada mais à frente no semestre nos Complementos de Cálculo Integral.