Análise Matemática III
Exercícios

Complementos de Cálculo Integral
Teoremas de Convergência. Integrabilidade

1. Calcule $\lim\limits_{nto\infty} \int_0^\infty \frac{r^n}{1+r^{n+2}} dr$

2. Calcule o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\ dx$

3. Seja $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{sen^2 x}{x^2}$. Prove que f é integrável em $]0,+\infty[$.

4. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2} dx.$

5. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\cos(x/n)}{1+x^2} dx.$

6. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^\infty e^{-|x|} \cos^n(x) dx.$

7. Decida se existe ou não o integral $\int_1^\infty (t \operatorname{sen}(\frac{1}{t}) - 1) dt$

8. Decida se existe ou não o integral $\int_1^\infty (1-e^{-1/t^2}) dt$. (Sugestão: Considere $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1-e^{-1/t^2}}{1/t^2}$).

9. Calcule $\int_B \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ em que $B = \{(x,y)\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$.

10. Use o teorema da Convergência Dominada para calcular
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)^n} dxdy$$

11. Prove que a função dada por $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ é integrável no conjunto $[1,\ +\infty[$ e calcule o respectivo integral.

12. Considere o conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^2 < 1,\ x > 1,\ 0 < y < 1\}$ e a função$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$, definida por $f_\alpha(x,y) = x^\alpha$.

    i) Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais f_α é integrvel em S.

    ii) Para cada α determinado na alínea anterior, calcule $\int_S f_\alpha$. Justifique todos os cálculos.

13. Seja $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $f_n(x,y) = \dfrac{1 + cos^n(x-y)}{(x^2+y^2+1)^2}$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_n$ existe e calcule o seu valor. Justifique.

14. Seja γ_n o gráfico da função $f_n(x) = x^{\frac{n+1}{n}}$ definida no intervalo $[0,1]$. Seja $l(\gamma_n)$ o comprimento de γ_n. Mostre que $\lim_{n\to\infty} l(\gamma_n) = \sqrt{2}$.

15. Calcule, justificadamente,

    i)
    $$\lim_{k\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1 + (|x| + |y|)^k}\, dx\, dy$$

    ii)
    $$\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}\, dxdydz$$

    em que $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 > 1\}$

    iii)
    $$\lim_{k\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1 + (x^2+y^2)^{k+1}}\, dxdy$$

16. Sejam $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, as funções definidas por $f_n(x,y) = \dfrac{e^{-(x^2+y^2)^n}}{1+x^2+y^2}$.

    Calcule $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_n$. Justifique os cálculos.

17. Sejam $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(k \in \mathbb{N})$, as funções definidas por

    $$f_k(x,y) = \frac{1 + (cos(x^2+y^2))^{2k}}{1 + (x^2+y^2)^{2k}}$$

    i) Prove que as funções f_k so integráveis em $\mathbb{R}^2$.

    ii) Calcule $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_k$. Justifique todos os cálculos.

18. Considere a função

    $$f(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(x) e^{-tx^2}\, dx$$

    em que $t > 0$. Prove que f é diferenciável e escreva uma expressão para a derivada $f'(t)$.

19. Considere a função real de variável real F definida para $t > 0$ por

    $$F(t) = \int_t^\infty e^{-tx^2}\, dx$$

    i) Verifique que F está bem definida e calcule o limite $\lim_{t\to 0^+} F(t)$.

    ii) verifique que F é diferenciável em todo o seu domínio e calcule uma expressão para a sua derivada.

20. Seja $f(t) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(ts)}{s} ds \quad (t > 0)$

a) Justifique que f é diferenciável em $]0, +\infty[$.

b) Calcule $f'(t)$.

21. Para cada $t > 0$, seja $F(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+x^2} dx$.

a) Mostre que F está bem definida.

b) Mostre que se verifica a relação: $F''(t) + F(t) = 1/t$.

22. Mostre que, para cada $t > 0$, se tem: $\ln t = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx$