Análise Matemática III

Exercícios

Teorema da Divergência

1 Considere o cubo

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Seja S a fronteira de V e n a normal exterior unitária a S. Considere o campo vectorial $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$. Calcule $\int_S f.n$ directamente e também usando o teorema da divergência.

2 Seja V o sólido limitado pelo plano $z = 3$ e pela parte inferior da esfera de raio 5 centrada na origem em $\mathbb{R}^3$. A fronteira de V é então formada por uma componente esférica S_1 e por uma componente plana S_2. Sendo $n = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$ a normal exterior unitária à fronteira de V, calcule $\int_S (xz\cos(\alpha) + yz\cos(\beta) + \cos(\gamma))$, onde

a) S é S_1.

b) S é S_2.

c) S é $S_1 \bigcup S_2$.

Resolva c) usando a) e b) e também através do teorema da divergência.

3 Considere o campo vectorial

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^5}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^5}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^5}\right).$$

Calcule $\int_V \operatorname{div}(f)$ onde V é definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 10\}.$$

4 Seja S uma superfície fechada e regular que limita um volume V em $\mathbb{R}^3$. Seja f um campo vectorial com segundas derivadas contínuas no fecho de V.

Mostre que o fluxo de $\operatorname{rot}(f)$ através de S é zero.

5 Considere o cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 3,\ -1 < z < 1\}.$$

Usando o teorema da divergência, calcule o fluxo dos campos vectoriais seguintes através de C:

a) $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2 - 1)$.

b) $g(x, y, z) = (x^2, y^2, z - 1)$.

6 Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2(x^2 + y^2),\ -2 < z \leq 0\}.$$

Usando o teorema da divergência, calcule o fluxo de $f(x, y, z) = (x, y, z)$ através de S, segundo a normal cuja componente segundo os z é negativa.

7 Encontre um campo vectorial em $\mathbb{R}^3$ cuja divergência seja constante. Use-o em conjunto com o teorema da divergência para calcular o volume de uma região de $\mathbb{R}^3$ limitada por:

a) Uma superfície esférica de raio a.

b) Um cilindro vertical de raio b e altura h.

c) Um cone $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leq z < 1\}$.

8 Calcule o fluxo de campo vectorial $f(x, y, z) = (x, y, z)$ através do elipsóide definido por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, segundo a normal exterior unitária.

a) Directamente.

b) Usando o teorema da divergência.

9 Considere o campo vectorial $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x, y, z) = (xg(z), -yg(z), z)$$

em que $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma função de classe C^1.

a) Fixe uma normal ao cilindro

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4,\ 0 < z < 1\}$$

e use o teorema da divergência para provar que o fluxo de f através de S, segundo essa normal, não depende de g.

b) Mostre que f é um campo gradiante se e só se g fôr uma função constante.

10 Usando o teorema da divergência calcule o fluxo do campo $f(x, y, z) = (x, 0, 0)$ através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y^2 + z^2) = x,\ 1 < x < 2\},$$

no sentido da normal unitária com componente segundo os x negativa.