Exame de Geometria Algébrica

25 de Julho de 2001

1 Propriedades elementares

1. Mostre que as variedades seguintes não são afins nem projectivas

(1 val.) (a) $\mathbb{A}^2 \setminus \{x\}$, onde $x \in \mathbb{A}^2$;

(1 val.) (b) $\mathbb{P}^2 \setminus \{x\}$, onde $x \in \mathbb{P}^2$;

(1 val.) (c) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$.

(1 val.) **2.** Mostre que a superfície definida pela equação $xy - zw = 0$ em $\mathbb{P}^3$ é isomorfa a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

2 Feixes

1. Dê um exemplo de um pré-feixe $\mathcal{F}$ num espaço topológico X que não verifique a 1ª condição de feixe:

(2 val.) (i) se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de $U \subset X$ e $s \in \mathcal{F}(U)$, então $s = 0$ sse $s|_{U_i} = 0$, $\forall i \in I$.

2. Dê um exemplo de um pré-feixe $\mathcal{F}$ num espaço topológico X que não verifique a 2ª condição de feixe:

(1 val.) (ii) se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de $U \subset X$ e $\{s_i\}_{i \in I}$ é uma colecção de secções $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in I$, tal que
$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$$
então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$, $\forall i \in I$.

3. Seja $\mathbb{P}^0 = \{(0 : \cdots : 0 : 1)\} \subset \mathbb{P}^n$. Considere a aplicação $\pi : \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^0 \to \mathbb{P}^{n-1}$ definida por $\pi(x_0 : \cdots : x_n) = (x_0 : \cdots : x_{n-1})$.

(1 val.) (a) Mostre que π é um morfismo cujas fibras $\pi^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{P}^{n-1}$, são espaços lineares complexos de dimensão 1.

(1 val.) (b) Mostre que $\pi : \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^0 \to \mathbb{P}^{n-1}$ é um fibrado de linhas algébrico ξ.

(1 val.) (c) Recorde que todos os fibrados de linhas sobre $\mathbb{P}^{n-1}$ são isomorfos a $\mathcal{O}(m)$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Calcule o inteiro m tal que $\xi \simeq \mathcal{O}(m)$.

Sugestão: Mostre que ξ é trivial em cada aberto da forma $E_i := \{x \in \mathbb{P}^{n-1} \mid x_i \neq 0\}$ e calcule as funções de transição dos fibrados ξ e $\mathcal{O}(m)$, correspondentes à cobertura $\{E_i\}_{i=0}^n$.

3 Propriedades locais

(1 val.) **1.** Seja X uma variedade e seja $x \in X$. Dizemos que X é irredutível em x se x pertence a uma única componente de X. Mostre que X é irredutível em x sse o anel local $\mathcal{O}_{X,x}$ é um domínio integral.

2. Recorde que o *blow-up* de $\mathbb{A}^2$ na origem é a subvariedade $\widetilde{\mathbb{A}}^2$ de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ definida pelas equações $xu = ty$, onde x, y são coordenadas para $\mathbb{A}^2$ e t, u são coordenadas homogéneas para $\mathbb{P}^1$. Seja $p : \widetilde{\mathbb{A}}^2 \to \mathbb{A}^2$ a projecção $p(x, y; t : u) = (x, y)$. Temos $E := p^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}^1$, e $p : p^{-1}(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}) \to \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ é um isomorfismo. A subvariedade $E \subset \widetilde{\mathbb{A}}^2$ é habitualmente designada por *divisor excepcional.*

Dada uma curva $C \subset \mathbb{A}^2$ tal que $0 \in C$, a *transformada estrita* de C em 0 é a curva $\widetilde{C}$ que se obtém tomando o fecho de $p^{-1}(C \setminus \{0\})$ em $\widetilde{\mathbb{A}}^2$. A curva $\widetilde{C}$ é bi-racional a C pois $p : \widetilde{C} \setminus \widetilde{C} \cap E \to C \setminus \{0\}$ é um isomorfismo. No *blow-up*, $\widetilde{\mathbb{A}}^2$, o ponto 0 é substituído por um espaço projectivo $\mathbb{P}^1$ cujos pontos correspondem aos declives das rectas que passam por 0, como ilustra o problema seguinte.

Considere as curvas C_1 e C_2 definidas em $\mathbb{A}^2$ pelas equações $y^2 = x^2(x + 1)$ e $y^2 = x^3$, respectivamente.

(1 val.) (a) Mostre que as curvas C_1 e C_2 são singulares na origem; esboce as curvas definidas pelas equações de C_1 e C_2 em $\mathbb{R}^2$ (*i.e.*, os pontos reais de C_1 e C_2).

(1 val.) (b) Seja $U \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ o aberto definido por $t \neq 0$. Calcule as equações de $\widetilde{C}_1 \cap U$. Verifique que $p^{-1}(0)$ é um conjunto com dois elementos que correspondem aos declives das tangentes a C_1 em 0. Mostre que a curva $\widetilde{C}_1$ é não-singular.

(1 val.) (c) Mostre que $\widetilde{C}_2$ é isomorfa a $\mathbb{A}^1$ e que $p : \widetilde{C}_2 \to C_2$ é uma aplicação bijectiva e bicontínua (na topologia de Zariski) que não é um isomorfismo (neste caso a singularidade é uma cúspide e portanto os declives são iguais).

4 Dimensão das fibras de um morfismo

(1 val.) **1.** Mostre que o espaço linear $S^d(x_0, \ldots, x_n)$ dos polinómios homogéneos de grau d, nas variáveis $x_0, \ldots, x_n$, tem dimensão $\binom{n+d}{d}$. Conclua que o espaço projectivo $\mathbb{P}(S^d(x_0, \ldots, x_n))$ tem dimensão $\nu_{n,d} = \binom{n+d}{d} - 1$.

(1 val.) **2.** Sejam $F_0(z_0, \ldots, z_n), \ldots, F_n(z_0, \ldots, z_n)$ polinómios homogéneos de graus $d_0, \ldots, d_n$, respectivamente. Considere o sistema de $n + 1$ equações em $n + 1$ variáveis $F_0(z) = \cdots = F_n(z) = 0$. Seja Γ o subconjunto de $\prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}^{\nu_{n,d_i}} \times \mathbb{P}^n$ definido por

$$\Gamma = \{(F_0, \ldots, F_n, z) \,|\, F_0(z) = \cdots = F_n(z) = 0\},$$

e sejam $p : \Gamma \to \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}^{\nu_{n,d_i}}$, $q : \Gamma \to \mathbb{P}^n$ as projecções.

(2 val.) (a) Mostre que $\dim \Gamma = \dim p(\Gamma) = \sum_i \nu_{n,d_i} - 1$.

(1 val.) (b) Use o resultado da alínea anterior para mostrar que existe um polinómio $R = R(F_0, \ldots, F_n)$, nos coeficientes dos polinómios $F_0, \ldots, F_n$, tal que $R(F_0, \ldots, F_n) = 0$ é uma condição necessária e suficiente para que o sistema de equações $F_0(z) = \cdots = F_n(z) = 0$ tenha uma solução não trivial.

(1 val.) (c) Identifique o polinómio R no caso em que os polinómios $F_0, \ldots, F_n$ são lineares. Justifique.

Sugestão: Aplique o teorema da dimensão das fibras de um morfismo. Pode usar, sem demonstrar, o facto de que toda a hipersuperfície num produto $\prod_{j=0}^{k} \mathbb{P}^{m_j}$ é definida por uma equação, que é homogénea em cada um dos $k + 1$ conjuntos de variáveis.