$1^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR 5 DOS PROBLEMAS SEGUINTES EM 21/3/2001

1. Sejam A, B anéis comutativos e $I \subset A$ um ideal. Mostre que dar um homomorfismo $\varphi : A/I \to B$ de aneis é equivalente a dar um homomorfismo $\tilde{\varphi} : A \to B$ tal que $I \subset \ker \tilde{\varphi}$.

2. Seja A um anel comutativo e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Mostre que $\ker \varphi$ é um ideal. Mostre que todos os ideais de A são desta forma.

3. Seja A um anel comutativo e $I \subsetneq A$ um ideal. Mostre que A/I é um corpo *sse* I é um ideal maximal (*i.e.* os únicos ideais que o contêm são I e A).

4. Dê um exemplo de um morfismo bijectivo de espaços com funções tal que f^{-1} não é um morfismo.

5. Mostre que $\mathbb{P}^1$ não é afim.

6. Seja B um anel comutativo e $J \subset B$ um ideal. O *radical* de J é o conjunto $\sqrt{J}$ definido por
$$\sqrt{J} = \{b \in B | b^r \in J, \text{ para algum } r \in \mathbb{N}\}.$$
Mostre que
   (a) $\sqrt{J}$ é um ideal;
   (b) se B/J não tem elementos nilpotentes então $J = \sqrt{J}$.

7. Seja $S \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$. Recorde que
$$V(S) = \{\lambda \in \mathbb{C}^n | p(\lambda) = 0, \forall p \in S\}.$$
Mostre que
   (a) $V(S) = V((S))$, onde (S) é o ideal gerado por S;
   (b) $V((S)) = V(\sqrt{(S)})$.

8. Se $(X, \mathcal{O}_X)$ é um espaço com funções e $U \subset X$ é um aberto, então U é um espaço com funções de forma natural: dado um aberto $V \subset U$, define-se $\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}_X(V)$. Sejam X, Y dois espaços com funções e seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Mostre que, se existem coberturas abertas $X = \bigcup_\alpha U_\alpha, Y = \bigcup_\alpha V_\alpha$ tais que $f(U_\alpha) \subset V_\alpha$ e $f : U_\alpha \to V_\alpha$ é um morfismo, então $f : X \to Y$ é um morfismo.