$2^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR 4 DOS PROBLEMAS SEGUINTES EM 28/3/2001

1. Determine $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})$.

2. Seja A um anel comutativo e $S \subset A$ um subconjunto multiplicativo. Mostre que o núcleo da aplicação de projecção $\pi : A \to A_S$ é o conjunto

$$\{a \in A \,|\, \exists\, s \in S \text{ t.q. } sa = 0\}$$

.

3. Nas condições do exercício 2, mostre que, se $P \subset A$ é um ideal primo e $S = A \setminus P$, então A_S (que é usualmente designado por A_P) é um anel local, *i.e.,* tem um único ideal maximal.

4. Nas condições do exercício 2, seja $\psi : A \to B$ um homomorfismo de anéis.

   (a) Mostre que existe uma factorização única

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A_S \arrow[ur, "\overline{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

   se e só se $\psi(s)$ é uma unidade, para todo $s \in S$.

   (b) Mostre que a propriedade da alínea anterior determina A_S a menos de isomorfismo, *i.e.*, se C é outro anel para o qual existe um homomorfismo $\rho : A \to C$ com a mesma propriedade da factorização que $\pi : A \to A_S$, então $C \cong A_S$.

   Nota: Da propriedade de factorização de ρ segue que $\rho(s)$, $s \in S$, é necessariamente uma unidade pois existe a factorização óbvia

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \\ C \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

5. Seja $X \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto algébrico, ou seja, $X = V(J)$ para algum ideal $J \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$. Seja $a(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$. Considere o conjunto

$$D(a) = \{\lambda \in V(J) \,|\, a(\lambda) \neq 0\}.$$

   Mostre que $D(a)$ é isomorfo a um subconjunto algébrico de $\mathbb{C}^{n+1}$.

   Sugestão: Considere o gráfico de $a(z_1, \ldots, z_n)$.

6. Seja X uma variedade algébrica. Um automorfismo de X é um isomorfismo $f : X \to X$. Mostre que todos os automorfismos de $\mathbb{A}^1$ são da forma $f(z) = az + b$ com $a \neq 0$.

7. Seja $X \subset \mathbb{C}^2$ a curva dada pela equação $z_2^2 = z_1$, *i.e.* $X = V((z_2^2 - z_1))$. Mostre que $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{C}[z]$.

8. Seja X um subconjunto de $\mathbb{C}^n$. Mostre que $V(\mathcal{I}(X))$ é o fecho de X na topologia de Zariski.

9. Prove o lema seguinte:

   Lema. (Nakayama) *Seja M um módulo de tipo finito sobre um anel comutativo A. Suponhamos que existe um ideal $I \subset A$ tal que $I \cdot M = M$. Então existe um elemento $a \in 1 + I$ tal que $a \cdot M = \{0\}$.*

   Sugestão: Aplique o método usado na demonstração do lema 1.4.2 do livro