$4^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR 2 PROBLEMAS EM 24/4/2001

1. (a) Seja $f : X \to Y$ uma morfismo afim e seja $U \subset Y$ um aberto afim. Mostre que existe uma cobertura $\{U_i\}$ de U, por abertos afins, tais que $f^{-1}(U_i)$ é afim;

   (b) seja $f : X \to Y$ uma morfismo finito e $U \subset Y$ um aberto afim. Mostre que existe uma cobertura $\{U_i\}$ de U, por abertos afins, tais que $f^{-1}(U_i)$ é afim e $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U_i))$ é um $\mathcal{O}_Y(U_i)$-módulo de tipo finito.

   Sugestão: Suponha que $V \subset Y$ é um aberto afim tal que $f^{-1}(V)$ é afim. Mostre que, para $g \in \mathcal{O}_Y(V) \neq 0$, o aberto $f^{-1}(D(g))$ é afim.

2. Mostre que a composição de dois morfismos afins é um morfismo afim e que a composição de dois morfismos finitos é um morfismo finito.

3. Seja X uma variedade irredutível e seja $Z \subset X$ um conjunto fechado. Mostre que $\dim Z = \dim X$ se e só se $Z = X$.

4. (a) Seja $f \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ um polinómio homogéneo irredutível, não constante. Mostre que a variedade $X = \mathbb{V}(f)$ tem dimensão $n-1$. Recorde que
$$\mathbb{V}(f) = \{(z_0 : \cdots : z_n) \in \mathbb{P}^n \mid f(z_0, \ldots, z_n) = 0\}.$$

   (b) Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma subvariedade fechada, irredutível, de dimensão $n-1$. Mostre que existe um polinómio homogéneo $f \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ tal que $X = \mathbb{V}(f)$.

   Sugestão: Considere $X \cap E_i$ e aplique as versões afins destes resultados. Pode usar o seguinte facto: se X é uma variedade irredutível e $U \subset X$ é um aberto, então $\dim X = \dim U$. Poderá ser-lhe também útil a construção que se segue. Dado um polinómio g em n variáveis $y_1, \ldots, y_n$, de grau d, é possível associar-lhe um polinómio homogéneo f, em $n+1$ variáveis $z_0, \ldots, z_n$, definido por
$$f(z_0, \ldots, z_n) = z_0^d \, g\left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right).$$
   Diz-se que f é a homogeneização de g.

   Nota: Os resultados são válidos sem a hipótese de irredutibilidade: as subvariedades fechadas de $\mathbb{P}^n$ cujas componentes têm todas dimensão $n-1$ são precisamente as da forma $\mathbb{V}(f)$. As variedades da forma $\mathbb{V}(f)$ dizem-se hipersuperfícies em $\mathbb{P}^n$.

5. Sejam X e Y hipersuperfícies em $\mathbb{P}^n$. Mostre que, se $n > 1$, então $X \cap Y \neq \varnothing$. **Sugestão:** Use o resultado do problema 4(b). Considere os cones $C(X)$ e $C(Y)$.

6. Seja $f(x, y, z) = xy - z^2$ e seja $X = V(f) \subset \mathbb{A}^3$. Note que a variedade $L \subset \mathbb{A}^3$, definida pelas equações $x = z = 0$, está contida em X. Mostre que

   (a) $\dim L = \dim X - 1$;

   (b) existe $h \in \mathcal{O}_X(X)$ tal que
$$L = V_X(h) := \{z \in X \mid h(z) = 0\};$$

   (c) o ideal
$$\mathcal{I}_X(L) := \{g \in \mathcal{O}_X(X) \mid g \equiv 0 \text{ em } L\}$$
   não é principal.