$7^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR EM 15/6/2001

1. Mostre que se X é uma variedade afim irredutível, então $K(X)$ é o corpo das fracções da álgebra das funções regulares $\mathcal{O}_X(X)$. Dê um exemplo de uma variedade em que isto não se verifica.

2. Seja X uma variedade, $x \in X$, e seja $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ o ideal maximal de x. Mostre que,

   (a) $\mathcal{O}_{X,x}$ é um anel noetheriano;

   (b) para todo o $k \geq 0$, o quociente $\mathfrak{m}_x^k/\mathfrak{m}_x^{k+1}$ é um espaço vectorial complexo de dimensão finita.

3. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície. Mostre que se X contém um plano L de dimensão $r \geq n/2$, então X é singular (*i.e.* tem pontos singulares) ou X é um hiperplano.

   Sugestão: considere um sistema de coordenadas em que L é dado por equações $z_{r+1} = \cdots = z_n = 0$ e tente mostrar que X tem pontos singulares em L.

4. Seja $f \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$. Mostre que $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i$, onde $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ é a derivada parcial usual.

5. Seja X uma variedade diferenciável, $Y = X \times X$ e seja $\Delta \subset Y$ a diagonal. Mostre que o fibrado normal a Δ, $N_\Delta Y$, é isomorfo ao fibrado tangente TX.

6. Seja $X = \mathrm{Spec}(A)$ e $Y = \mathrm{Spec}(B)$. Mostre que

   $$\Omega[X \times Y] \simeq (\Omega[X] \otimes B) \oplus (\Omega[Y] \otimes A)\,.$$

   Ou seja, toda a forma ω em $X \times Y$ pode ser escrita de forma única como $f \cdot \omega_X + g \cdot \omega_Y$, com $f \in B$, $g \in A$, $\omega_X \in \Omega[X]$ e $\omega_Y \in \Omega[Y]$, onde ω_X e ω_Y são únicas a menos de constantes multiplicativas.

7. Seja $C \subset \mathbb{A}^2$ a curva definida pela equação $x^2 + y^2 = 1$. Mostre que

   (a) toda a função regular em C pode ser escrita de forma única como $f(y) + xg(y)$ onde f e g são polinómios;

   (b) toda a forma $\omega \in \Omega[C]$ pode ser escrita de forma única como

   $$\omega = f(y)dx + (g(y) + xh(y))dy$$

   onde f, g e h são polinómios;

   (c) os abertos $D(x)$ e $D(y)$ cobrem C;

   (d) as formas $\frac{dx}{y} \in \Omega[D(y)]$ e $-\frac{dy}{x} \in \Omega[D(x)]$ coincidem em $D(xy)$.

   (e) Determine uma forma $\omega \in \Omega[C]$ tal que $\omega|_{D(y)} = \frac{dx}{y}$ e $\omega|_{D(x)} = -\frac{dy}{x}$.