$8^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR 4 PROBLEMAS EM 30/7/2001

1. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade quase-projectiva e seja $\mathcal{C}_k(X) \subset \mathbb{G}(k,n)$ o conjunto dos planos-k que intersectam X. Mostre que $\overline{\mathcal{C}_k(X)} = \mathcal{C}_k(\overline{X})$.

2. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade quase-projectiva e seja $k \geq \operatorname{codim} X$. Mostre que

   (a) o plano genérico $P \in \mathbb{G}(k,n)$ intersecta X;

   (b) podem existir planos $P \in \mathbb{G}(k,n)$ tal que $P \cap X = \varnothing$.

3. O objectivo deste exercício é mostrar que, se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade quase-projectiva de dimensão k, então o plano-k genérico, $P \in \mathbb{G}(n-k,n)$, intersecta X num número finito de pontos.

   (a) Observe que o resultado é válido se $k = 0$.

   (b) Mostre que existe um hiperplano $H \subset \mathbb{P}^n$ tal que $\dim(X \cap H) = k-1$.

   (c) Supondo que o resultado foi estabelecido para $k-1$, mostre que existe um plano P de dimensão $n-k$ tal que $P \subset H$ e $P \cap X$ é finito.

   (d) Usando a correspondência

   $$\Sigma_X = \{(P,x) \in \mathbb{G}(n-k,n) \times X \mid x \in P\},$$

   a projecção $pr_1 : \Sigma_X \to \mathbb{G}(n-k,n)$ e as alíneas anteriores, mostre que existe um aberto não vazio $U \subset \mathbb{G}(n-k,n)$ tal que $X \cap P$ é finito, para todo $P \in U$.

   Nota: Adicionalmente, é possível mostrar que existe um número $d > 0$ e um aberto $U \subset \mathbb{G}(n-k,n)$ tal que $\#(X \cap P) = d$, para todo $P \in U$. O número d é designado por grau de X e é denotado $\deg(X)$. O grau não é um invariante da variedade X, mas sim do mergulho de X em $\mathbb{P}^n$.

4. Seja $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ uma sucessão exacta de feixes abelianos tal que $\mathcal{F}$ é flácido. Mostre que a sucessão de grupos abelianos

   $$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(\alpha)} \Gamma(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\Gamma(\beta)} \Gamma(X,\mathcal{H}) \to 0,$$

   é exacta.

5. Usando o problema anterior mostre que todo o feixe flácido numa variedade algébrica é acíclico.

6. Sejam $X = \mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x,y])$ e $U = X \setminus \{(0,0)\}$. Usando a cobertura $\mathcal{U} = U_0 \cup U_1$, onde $U_0 = D(x)$ e $U_1 = D(y)$, mostre que o grupo de co-homologia de Čech $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_U)$ é isomorfo ao subespaço vectorial de $\mathbb{C}[x,y,x^{-1},y^{-1}]$ gerado por $\{x^i y^j \mid i,j < 0\}$. Em particular, $H^1(U,\mathcal{O}_U)$ tem dimensão infinita e portanto U não é afim.