$1^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR EM 06/03/2003

1. Seja A um anel[1] e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Mostre que $\ker \varphi$ é um ideal. Mostre que todos os ideais de A são desta forma.

2. Seja A um anel e $I \subsetneq A$ um ideal. Mostre que

   (a) A/I é um domínio integral *sse* I é primo;

   (b) A/I é um corpo *sse* I é maximal.

3. (a) Sejam $I_\alpha \subset A$, $\alpha \in S$, ideais. Mostre que $I = \cap_{\alpha \in S} I_\alpha$ é um ideal;

   (b) Recorde que se $S \subset A$ o ideal gerado por S é a intersecção (S) de todos os ideais que contêm S. Mostre que

$$(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i a_i \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in A, a_i \in S \right\}.$$

4. Mostre que um ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ é *monomial sse* I é gerado por monómios.

5. Usando a ordem lexicográfica de monómios, calcule o resto da divisão de $f = x^7y^2 + x^3y^2 - y + 1$ pelo conjunto ordenado $F = (f_1, f_2)$, onde

   (a) $f_1 = xy^2 - x$, $f_2 = x - y^3$;

   (b) $f_1 = x - y^3$, $f_2 = xy^2 - x$.

[1] Recorde que todos os anéis que consideramos são comutativos e têm identidade