$2^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR EM 13/03/2003

1. Seja A um anel e $I \subset A$ um ideal. O *radical* de I é o conjunto $\sqrt{I}$ definido por

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists_{r \in \mathbb{N}} : a^r \in I\}.$$

   Mostre que

   (a) $\sqrt{I}$ é um ideal;

   (b) se A/I não tem elementos nilpotentes (*i.e.*, elementos x tais que $x^r = 0$, para algum $r \in \mathbb{N}$) então $I = \sqrt{I}$.

2. Seja k um corpo (não necessariamente algebricamente fechado) e sejam $X, Y, X_i, i \in \Lambda$, subconjuntos de k^n. Mostre que

   (a) $X \subset Y \Rightarrow \mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{I}(X)$;

   (b) $\mathcal{I}(\cup_{i \in \Lambda} X_i) = \cap_{i \in \Lambda} \mathcal{I}(X_i)$;

   (c) $\mathcal{I}(\varnothing) = k[x_1, \ldots, x_n]$;

   (d) $\mathcal{I}(k^n) = 0$ se k for algebricamente fechado;

   (e) existem corpos k tais que $\mathcal{I}(k^n) \neq 0$.

3. Seja k um corpo algebricamente fechado, com característica diferente de 2. Determine as componentes irredutíveis do conjunto algébrico $X \subset k^3$ definido pelas equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$
$$x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0.$$

4. Considere os conjuntos algébricos $X, Y \subset k^2$ definidos por

$$X = V(y - x^2)$$
$$Y = V(y^2 - x^3)$$

   (a) Determine $k[X]$.

   (b) Mostre que os elementos de $k[Y]$ podem ser escritos unicamente na forma $P(x)+Q(x)y$, com $P(x), Q(x) \in k[x]$.

   (c) Determine as componentes irredutíveis de X, Y.

5. Seja $X \subset k^n$ um conjunto com s elementos. Mostre que $k[X] \cong \oplus_{i=1}^s k$.